

2025年度10月入学・2026年度4月入学(Ⅰ期)  
東北大学大学院経済学研究科博士課程前期2年の課程  
筆答試験問題

経済経営科目 「数理統計」 (日本語もしくは英語で解答すること)

以下のすべての問いに答えなさい。

問1. 2つの都市の無作為に抽出された住民に対して、エコ製品を「購入する/購入しない」と回答するアンケート調査を用いて、「二都市におけるエコ製品の購入割合は同じか」を検定する問題について考える。

1. カイ二乗検定を使う場合、検定結果の妥当性を保証する条件について述べよ。
2. カイ二乗検定を使う条件を満たしていない場合、代替の検定について述べよ。

解答

1.

1) 期待度数の下限 (近似妥当性) : 原則: 全セルの期待度数が 5 以上。緩和: 期待度数  $< 5$  のセルが全体の 20% など。サンプル数が多く必要である旨の解答で○。

2) 独立性: 各回答は相互に独立 (無作為抽出、重複回答なし)、実質こちらは問題文で提示しているため、答えなくてもOK。

2. 期待度数が小さい ( $< 5$ が多い、 $< 1$ がある、標本が小さい) とき  
Fisherの正確確率検定、置換検定を使うことができる。

出題意図

「いつカイ二乗検定が使えるか」を言語化できるか  
標本数が少ない時に扱うFisher検定等の方法を把握しているのか

問 2. 関数  $Y = X^2 + X$  を考える。確率変数  $X$  はパラメータ  $\lambda > 0$  のポアソン分布に従い、その確率変数は

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

1. 期待値  $E[Y]$  を求めよ。計算過程も書くこと。
2.  $\lambda = 2$  の時、 $P(Y \leq 2)$  を求めよ。ただし、 $e^{-2} = 0.1353$  とする。

## 解答

1.

$$E[Y] = E[X^2 + X] = E[X^2] + E[X]$$

ポアソン分布の性質を利用して

$$E[X] = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda, E[X] = \lambda$$

また、 $E[X^2]$  は

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

により

$$E[X^2] = \text{Var}(X) + (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2$$

解答は

$$E[Y] = \lambda + \lambda^2 + \lambda = 2\lambda + \lambda^2$$

2.

$Y = X^2 + X \leq 2$  のケースは

$$X=0, Y=0,$$

$$X=1, Y=2$$

$$X=2, Y=6$$

により、

$$P(Y \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = e^{-2} + 2e^{-2} \approx 0.4059$$

## 出題意図

1. ポアソン分布の基本性質、および分散の表現から  $E[X^2]$  の計算ができるのかを確認
2. 条件付き確率や離散型確率の理解

問3. ある病院で2種類のワクチンを実験的に抽出された被験者に投与した。各被験者は2種類のワクチンのどちらのみ投与されたとする。その結果、以下のデータが得られた。

ワクチンA:  $n_1$ 人中 $x_1$ 人が副反応,  $n_1 > 0, x_1 \geq 0$

ワクチンB:  $n_2$ 人中 $x_2$ 人が副反応,  $n_2 > 0, x_2 \geq 0$

1.  $p_1, p_2$ をそれぞれ母集団においてワクチンA, Bを接種した場合に副反応が出る確率だとする。帰無仮説  $H_0: p_1 = p_2$ に対する検定統計量を導け。
2.  $n_1 = 50, n_2 = 50, x_1 = 30, x_2 = 20$ の時、ワクチンA, Bの間に有意水準 $\alpha = 0.05$ で母比率 $p_1$ と $p_2$ の差が有意かどうかを判定せよ(両側検定)。ただし、標準正規分布の上側2.5%点を1.96, 上側5%点を1.645とする。

### 解答

1.

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}, \quad \hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}, \quad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$$

標準誤差は

$$SE = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

検定統計量は

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{SE}$$

2. 代入すると、

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = 0.5, \quad \hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = 0.6, \quad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = 0.4$$

$$SE = \sqrt{0.25 \times 0.04} = 0.1$$

$$Z = \frac{0.2}{0.1} = 2 \geq 1.96$$

よって、帰無仮説を棄却。統計的に、ワクチンAとBの副反応率には有意な差がある。

### 出題意図

1. 出題した帰無仮説に対する検定統計量の選択
2. ①標本比率の算出、②プール推定量の理解、③標準誤差の計算、④Z統計量の構築、⑤有意差の判断、という統計的推論の一連のプロセスを整理して説明できる能力の考察