

解答例

問 1. (a) ○ (b) × $p(1-p)$ (c) ○ (d) × ベータ分布 (e) × $\ln 2$

出題意図：

ベルヌーイ分布の定義、統計的性質、共役事前分布、エントロピーなどの多角的な基礎知識を問う。

問 2.

1. 二項定理 $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ により、

$$(p+1-p)^n = 1^n = 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n P(X=k)$$

2. 変数変換

$$x = \beta t, t = \frac{x}{\beta}, dx = \beta dt$$

によって

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \beta (\beta t)^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

ここで、

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

であるため、

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{1}{\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = 1$$

出題意図：二項定理と微分の関係を用い、二項分布の総和の性質や期待値・分散の導出に必要な数式展開能力を問う。

問 3.

$$1. \quad E(T) = \frac{1}{\lambda} = 10 \Rightarrow \lambda = 0.1$$

$$2. \quad P(T \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = [e^{-\lambda t}]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = 0.1 \Rightarrow P(T \leq 5) = 1 - e^{-0.5} \approx 1 - 0.607 = 0.393$$

3.

$$P(T \leq 10) \geq 0.9$$

$$1 - e^{-10\lambda} \geq 0.9$$

$$0.1 \geq e^{-10\lambda}$$

対数をとると

$$-10\lambda \leq \ln(0.1) = -\ln(10)$$

$$\lambda \geq \frac{\ln(10)}{10} \approx 0.23 \Rightarrow E(T) = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{0.23} \approx 4 \quad (\text{分})$$

許容される平均購入時間の最大値は4分である。

出題意図：指数分布の特性を理解し、パラメータ推定、累積分布関数による確率計算、実務的な目標値の逆算力を問う。