

2026年度4月入学(Ⅱ期)

東北大学大学院経済学研究科博士課程前期2年の課程

筆答試験問題

経済経営科目 「数理統計」 (日本語もしくは英語で解答すること)

以下のすべての問いに答えなさい。

問1 確率変数 X が成功確率 $p \in (0, 1)$ のベルヌーイ分布 $X \sim \text{Bern}(p)$ に従うとする。

次の(a)~(e)のうち、適切なものをすべて選べ。

- (a) ベルヌーイ分布は指数型分布族に属する。
- (b) ベルヌーイ分布の分散は $2p(1-p)$ である。
- (c) ベルヌーイ分布の最尤推定量 \hat{p} は標本平均に一致し、これは不偏推定量である。
- (d) ベルヌーイ分布の共役事前分布は正規分布である。
- (e) ベルヌーイ分布のエントロピーは最大で $\ln 1$ である。

問2 1. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ に対して、二項定理を用いて、 $\sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$ であることを示せ。ただし、 $k = 0, 1, \dots, n$, $0 < p < 1$ とする。

2. $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $x > 0$ に対して、 $\int_0^\infty f(x) dx = 1$ であることを示せ。ただし、 $\alpha > 0, \beta > 0$ とする。また、 $\alpha > 0$ に対し、 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ である。

問3 顧客がサイトにアクセスしてから購入に至るまでの購入時間(分)は指数分布に従うと仮定する。時間を確率変数 T とし、確率密度関数を $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$ とする。

- 1. 平均購入時間が10分であるとき、パラメータ λ を求めよ。
- 2. 上記で求めた λ を使い、顧客が5分以内に購入する確率を求めよ。ただし、計算上 $e^{-0.5} \approx 0.607$ とする。
- 3. 企業はサイト改善により、10分以内に購入する確率が90%以上となることを目標としている。この目標を達成するために許容される平均購入時間(分)の最大値を求め、整数で答えよ。ただし、計算上 $\ln 10 \approx 2.3$ とする。