

2024年8月

2024年度10月入学・2025年度4月入学(I期)
東北大学大学院経済学研究科博士課程前期2年の課程
筆答試験問題

経済経営科目 「経済経営数学」 (日本語もしくは英語で解答すること)
以下の各問すべてに答えなさい。

問1 次の各問の計算をなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(2) $\int_0^1 \log_e (1 + \sqrt{x}) dx$

問2 次の行列 A が逆行列を持たないように α を決めよ。

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & \alpha \end{pmatrix}$$

問3 関数 $f(\cdot)$ が区間 $I = (\alpha, \beta)$ で凸関数であるとは、 $x_1, x_2 \in I$ について

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

が成り立つことをいう。凸関数の性質について関数 $f(\cdot)$ が区間 I で2階微分可能ならば $f''(x) \geq 0$ と同値なことが知られている。定数 p, q が、 $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ を満たすものとして、以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = -\log_e x$ が凸関数なことを示し、 $a, b \geq 0$ について

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{\xi_n\}$ と $\{\eta_n\}$ について $X = (\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p)^{1/p}$ と $Y = (\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q)^{1/q}$ は $X < \infty$ および $Y < \infty$ が成り立つとする。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\xi_n \eta_n|}{XY} \leq 1$$

すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{1/q}$$

が成り立つことを示せ。