

解答例

問 1 .

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

三角関数の極値問題。 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ の性質を利用。 $\sin x = z$ に置き換えれば、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{6x-1}$$

分子分母を最高次の項 x で割って求める。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{6x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x}}{6 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$$

$x = 0$ でテイラー展開を利用。

$$e^{2x} - 1 = 2x + 2x^2 + \cdots$$

従い、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + 2x + \cdots) = 2$$

出題意図：微分に関する知識（3問各自、三角関数, 変換, テイラー展開）を確かめる。

問 2 .

$$1. \int_1^3 \frac{2x+3}{x^2+2x+1} dx = \int_1^3 \frac{2(x+1)+1}{(x+1)^2} dx = \int_1^3 \frac{2}{x+1} dx + \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2} dx = 2 \log 2 + \frac{1}{4}$$

$$2. x^2 + y^2 \leq 1$$

出題意図：積分に関する基礎知識を確かめる。

問3. ラグランジュの未定乗数法を用いる。

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = 2(xy + 2yz + zx) - \lambda(x + y + z - 18)$$

それぞれの偏微分を通して、下記の連立方程式を解く。

$$2(y + z) = \lambda$$

$$2(x + 2z) = \lambda$$

$$2(2y + x) = \lambda$$

$$x + y + z = 18$$

(1)と(2)により、 $x + 2z - y - z = 0 \rightarrow y = x + z$, さらに(4)式により $y = 9$.

$x + z = 9$, また (2), (3)により $2z = 18$, よって、 $z = 9, x = 0$.

出題意図：ラグランジュの未定乗数法の活用、極大値（本問題では最大値でもある）の求め方の理解を確かめる。

問4.

1. $\det(A) = 250 \neq 0$ のため、正則行列。

2. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 15 - \lambda & 10 \\ 5 & 20 - \lambda \end{pmatrix}$ 、固有値を計算すると、 $\lambda^2 - 35\lambda + 250 = 0$, よって $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 25$.

固有ベクトルは $\lambda_1 = 10$ の時、 $\begin{pmatrix} 15 - 10 & 10 \\ 5 & 20 - 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、

計算すると固有ベクトル $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍。同じく、 $\lambda_1 = 25$ の時、 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の定数倍

3. $A^2 = P\Lambda^2P^{-1}$ を利用。 $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \text{adj}(P) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 & 625 \\ 100 & 625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{200 + 625}{3} & \frac{-200 + 1250}{3} \\ \frac{-100 + 625}{3} & -\frac{100 + 1250}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 & 350 \\ 175 & 450 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

出題意図：正則行列の判定方法、固有値および固有ベクトルの求め方、固有値、固有ベクトルを用いた $A^N = P\Lambda^NP^{-1}$ の活用などに関する知識を確かめる。

問5.

1. $|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$. 同じく、 $|\vec{B}| = \sqrt{6}, |\vec{C}| = 7$

2. $d(\vec{A}, \vec{B}) = \sum_{i=1}^3 |\vec{A}_i - \vec{B}_i| = \sqrt{3}$, 同じく $d(\vec{A}, \vec{C}) = \sqrt{26}, d(\vec{B}, \vec{C}) = \sqrt{21}$. $d(\vec{A}, \vec{B})$ が一番小さい。

3. $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{2}{\sqrt{6}}$. 同じく、 $\cos(\vec{A}, \vec{C}) = \frac{16}{21}, \cos(\vec{B}, \vec{C}) = \frac{17}{7\sqrt{6}}$. $\cos(\vec{B}, \vec{C})$ が一番高い。

出題意図：ベクトル演算（ノルム、ユークリッド距離、コサイン類似度）に関する理解を確かめる。

問6.

1. $x \rightarrow +\infty$ の場合、 $a = -1$ の時、分子が1になり、収束、 $a < -1$ でも、分子は0に収束する。 $a \in (-\infty, -1]$.

2. $x \rightarrow +0$ の場合、分子 $e^{(a+1)x} \rightarrow 1$ になるので、 a に依存せず。よって、 $a \in \mathbb{R}$.

出題意図：関数の収束、発散に関する理解を確かめる。