TERG

Discussion Paper No.327

ヘクシャー=オリーン=サミュエルソン貿易理論と資本理論

黒瀬一弘　　　　吉原直毅

2015 年 1 月 26 日
2015 年 4 月 8 日改訂

TOHOKU ECONOMICS RESEARCH GROUP

GRADUATE SCHOOL OF ECONOMICS AND
MANAGEMENT TOHOKU UNIVERSITY
27-1 KAWAUCHI, AOBA-KU, SENDAI,
980-8576 JAPAN

ヘクシャー＝オリーン＝サミュエルソン貿易理論と資本理論*

黒瀬一弘† 吉原直毅‡

2015 年 4 月 8 日

概要

本稿は、ヘクシャー＝オリーン＝サミュエルソンモデル（HOS モデル）の理論的発展をレビューする。ケンブリッジ資本論争における新古典派経済学に対する批判を受けて、HOS 貿易理論がどのような反応を示したのかにとりわけ関心を向ける。Samuelson（1953）による一般均衡理論に基づく HOS 貿易理論は、費用関数のヤコビアンを用いて要素価格均等化定理の成立条件を明らかにし、その後の研究の方向性に大きな影響を与えた。資本論争での 1 つの教訓は、資本が複数の再生産可能財から成る場合、限界生産力説が一般的には成立しないことであった。同様に、国際貿易理論の文脈でも、標準的な HOS モデルの様に資本を 1 つの本源的生産要素と取り扱うのではなく、複数の再生産可能財から成ると見做すならば、資本を複数の再生産可能な財からなるものとしてより適切に定式化された下では、2 財の世界であれ、それ以上の財の存在する世界であれ、一般的に要素価格均等化が実現しない事を本稿は示す。資本論争での批判を受けて、Burmeister (1978) は資本が本源的生産要素ではなく再生産可能財から成る場合の要素価格均等化の成立条件の特徴づけを行ったが、彼が提示したモデルは資本論争で提起された問題を回避していることを示す。以上の議論は、既存の標準的な HOS 貿易理論とは異なって、要素価格均等化の実現を前提とせずに、資本を複数の再生産可能な財からなるものとしてより適切に定式化された下での国際貿易の基礎理論を新たに再構築する必要性を示唆している。

JEL Classification Code: B51, D33, F11.

* 本稿は一橋大学経済研究所定例研究会（2014 年 11 月 19 日）で報告された。研究会の参加者、とりわけ討論者の高増明教授（関西大学）より有益なコメントを賜った。また佐々木隆生教授（北星学園大学）、佐々木啓明准教授（京都大学）、佐藤秀夫氏（東北大学名誉教授）にも有益なコメントを頂戴した。記して感謝申し上げる。

† 東北大学大学院経済学研究科准教授、E-mail：kurose@econ.tohoku.ac.jp

‡ 一橋大学経済研究所教授、E-mail：yosihara@ier.hit-u.ac.jp

1 イントロダクション

21 世紀を特徴づける言葉の 1 つに、「グローバリゼーション」あるいは「グローバル化」が含まれることに、異議を唱える者はいないであろう。「グローバリゼーション」と呼ばれる現象を定義づけることは、実はそう容易ではないが、「政治的境界を越えた経済統合が進み、財・サービス、資本、労働力の国際的移動が活発になり、何人もその影響から免れることができない」現象と理解しても少なくとも経済学的には問題ないであろう[*1]。すなわち、グローバリゼーションとは、政治的障壁によって各国ごとに分断されていた財・サービス市場、資本市場、労働市場が漸次「世界市場」という単一の市場に包摂されていくプロセスに他ならない。

市場自体が 1 つの経済システムであり、歴史的に構築されるものである。現在のグローバリゼーションを構築した諸力は、第 1 に第 2 次大戦戦後直後から１９７０年代初頭までの世界経済の基本的枠組みを構成していた IMF–GATT 体制の下で「自由・無差別・多角主義」をスローガンとして、漸次関税の引き下げが行われ、自由貿易体制が着実に整えられてきたことである。第 2 に、ニクソン・ショックを契機に IMF 固定相場制の維持が事実上放棄され、先進諸国の多くが変動相場制に移行したことである。第 3 に、反ケインズ革命に根拠づけられ先進諸国で推し進められてきた規制緩和・撤廃が国際資本移動の自由化を推し進めたことである。第 4 に、WTO の設立によって財の貿易のみならず、金融取引・情報通信・知的財産権やサービス貿易をも含めた包括的な国際通商ルールが策定されたことである[*2]。

多くの経済理論はグローバリゼーションの進展を常に支持してきた。その理論的痕跡は長い歴史を有している。アダム・スミス、ディヴィッド・リカードゥ、J.S. ミル、カール・マルクスら 19 世紀のほとんどの経済学者は開放体系の閉鎖体系に対する優位性を主張している[*3]。リカードゥの「比較優位（comparative advantage）」は現在でも国際経済理論の金字塔の 1 つである。また新古典派経済学はヘクシャー=オリーン=サミュエルソンモデル（以後、HOS モデルと表記する）を開放体系の優位性を説くために用いてきた。多くの経済学者がグローバル化していくプロセスを支持するのは、貿易による利益が存在す

[*1] 「グローバリゼーション」の定義をめぐる様々な議論については、Wolf (2004, Chap. 2) を参照されたい。

[*2] 第 2 次大戦後から現在までの世界経済の歴史的変遷については、佐々木（2010）に詳しい。

[*3] 例外はマルサス（1940）とリスト（1970）である。マルサスが「食糧安全保障論」を展開し、リストが「幼稚産業保護論」の原型を提示し、自由貿易批判を行ったことは周知の通りである。また、古典派国際貿易論については Chipman (1965) を参照されたい。

る、と考えるからである。それは、第 1 に国際貿易によって消費可能性を拡大させる「消費利益」であり、第 2 に比較優位財の生産を拡大し、より高い価格で外国に輸出できるという「生産利益」である[*4]。

しかし、マルクスを含めた古典派の経済学者たちは貿易の利益を主張するにあたって、各国で利用できる生産技術が異なるケースを想定していたのに対して、HOS 貿易理論では、各国は共通の生産技術を利用可能であるが、要素賦存量が国ごとに異なるケースを想定している、という違いがあることに留意する必要がある。我々は、現代世界経済を検討するにあたって、HOS モデルの想定は、以下の様な意味で、グローバリゼーション下の世界経済の一側面を捉えていると考える。すなわち、グローバリゼーションは先述のように財・サービス、資本、労働のみならず情報、知識を活発に移動させる。つまり、情報と知識のグローバル化である。情報と知識のグローバル化は、誰もがどこにいてもそれらにアクセスできることを意味している。このことは、先進国も途上国も同一の生産技術集合に直面しているという想定が十分許容可能な近似であることを示唆していると解釈できよう[*5]。他方、生産技術の知識にアクセス可能である事は、直ちにその生産技術を利用しての生産活動が可能である事を意味する訳ではなく、その技術を利用する為に必要な資本装備や十分な労働力が投入可能でなければならず、それらは生産要素の国際間移動の不完全性――国際的要素市場の不完全性――の下では、その国の蓄積してきた要素賦存量によって制約される。

ところで、HOS モデルで現代世界経済に接近する場合、HOS モデルから導出される一連の定理—HO 定理、要素価格均等化定理、ストルパー・サミュエルソン定理、リプチンスキー定理—の成立が吟味されなければならない。そうした吟味は「レオンチェフ・パラドックス」(Leontief, 1953, 1956) の発見以降夙に行われてきたが、本稿では要素価格均等化定理にとりわけ注目する。同定理が HOS モデルの要石であることは贅言を要さない。同定理によれば、自由貿易によって成立する世界市場均衡価格は、要素価格の均等化を保証する。グローバリゼーションの下で自由貿易体制が確立していると見做せるとすれば、はたして要素価格は均等化の傾向を有している、と見做せるであろうか？興味深い研究がある。Obstfeld and Rogoff (2005) はアメリカの経常収支不均衡に関する分析の中で、アメリカが享受している外国資産からの収益率と諸外国が享受している在アメリカ資産からの収益率の間にはかなりの長い期間にわたって格差が存在し、前者の方が高いと論じている。1983 年から 2003 年までにアメリカが対外資産から得た投資収益は、アメリ

[*4] 伊藤・大山（1985）の第 1 章を参照されたい。
[*5] 各国の労働力は同質かという問題はあるが、ここではその点には踏み込まない。

カの負債から諸外国が得た投資収益よりも年平均で 1.2 %高く、それらの投資収益にキャピタルゲインを加えるとアメリカが得た収益は同じ期間で諸外国より年率 3.2 %も高いという。佐藤（2008）は対外直接投資からの収益に限定して同様の研究を行っており、それによるとアメリカが対外直接投資で得た投資収益率は 1990 年から 1999 年までの間で平均 10.7 %、2000 年から 2007 年の間で平均 11 %であるのに対して、諸外国が対米直接投資で得た投資収益率は前者の期間で 3.2 %、後者の期間で 5.2 %と大きな格差が存在するという。ここでの投資収益率を資本の要素価格と看做せば、比較的長期にわたる上記のような要素価格の格差をどのように解釈すべきであろうか？ HOS モデルの発展を鳥瞰しつつ、この点を考察するのが本稿の目的である[*6]。

とりわけ本稿で注目するのが 1960 年代から 1970 年代にかけて起こったケンブリッジ資本論争の成果と HOS モデルの発展の関係である。周知のように、ケンブリッジ資本論争では、新古典派生産関数に基づく限界生産力説が一般的には成立しないことが、明らかにされた。HOS モデルが依拠する新古典派生産関数では、資本は労働と同様に本源的要素であり、資本の価値額は価格体系から独立して所与と仮定されているが、資本は複数の再生産可能財から構成されると仮定すれば、新古典派生産理論は必ずしも成立しないことが明らかになった。第 1 に、新古典派生産関数を前提すれば、利潤率と生産技術は一対一に対応し、ある 1 つの利潤率に対応する生産技術は他の利潤率に対応することはないとされる。しかし、資本が複数の再生産可能財から成る場合、1 つの生産技術が複数の利潤率に対応するという **技術の再転換**（*reswitching of techniques*）が起こり得る。第 2 に、資本が複数の再生産可能財から成る場合、限界生産力説が説くような資本集約度（資本労働比率）と利潤率の間の単調減少関係は一般的には成立せず、**資本逆行**（*capital reversing*)が起こり得ることも論じられた。のちに詳細に論じるように、HOS 貿易理論においても資本は本源的要素であり新古典派生産関数の存在を前提にしているから、当然のことながら資本論争の成果は即座に HOS 貿易理論の妥当性の吟味にも適用された。このような吟味を行ったのが、ケンブリッジ大学の P. スラッファに影響を受けたネオ・リカードゥ派に属する人たちであった。スティードマン、メトカーフ、マインウェアリングはその代表である。彼らは代替的な生産技術が存在するレオンチェフ・モデルを用いて、資本が複数の再生産可能財から成る場合には、要素価格均等化定理は一般的に成立しない、と論じた。

このようなネオ・リカーディアンの議論によれば、上記のようなアメリカとそれ以外の国々との間に存在する要素価格の格差は不可思議な現象ではないと言える。それは不十分

[*6] 本稿では関心を専ら資本に向けるが、標準的な HOS モデルでは解明することのできない国際貿易と賃金格差に関しても多くの研究成果が現れはじめている。この点については Kurokawa (2014) を参照されたい。

な規制緩和や関税撤廃などに起因するのではなく、たとえ現実の世界市場が理論の想定する完全競争市場であったとしても生じ得る可能性がある。このような可能性は多くの経済学者の関心を惹いてしかるべきであるが、こうした観点から HOS 貿易理論を検討した文献は極めて少ない。高増（1991）が例外的文献であるが、HOS 貿易理論というよりはネオ・リカーディアンの議論に重きが置かれている。したがって、上記のような問題意識から、新古典派 HOS 貿易理論がケンブリッジ資本論争の成果に対してどのような反応を示したのかをレビューすることは、この論争の教訓が学界において殆ど忘却されている現在において、改めて意義がある、と考える。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節では、資本が本源的要素である場合の HOS 貿易理論をレビューする。Samuelson (1953) による一般均衡理論による定式化は、費用関数のヤコビアンによって要素価格均等化定理の成立を条件付け、それはその後の研究の方向性に大きな影響をもたらし、Gale and Nikaido (1965)、Nikaido (1968) などを生み出した。また、Samuelson (1966a) や Nikaido (1972) などによる要素費用の相対的シェアから集約度を定義し、相対シェア行列式から要素価格均等化定理を証明する方法、Nikaido (1972) を一般化させた Mas-Colell (1979a, b)、財の数と要素の数が等しくない場合を許容する要素価格均等化定理を論じた Kuga (1972)、規模に関して収穫逓減や中間財の存在を許容し Kuga (1972) をさらに一般化した Blackorby et al. (1993) を扱う。さらに、費用関数のヤコビアンによる条件付けはストルパー・サミュエルソン定理の成立にも応用され、Chipman (1969)、Uekawa (1971)、Uekawa et al. (1972) などを生み出したことにも言及する。

第 3 節では、資本が複数の再生産可能財から成る場合の HOS 貿易理論の妥当性について、検討する。最初に、ケンブリッジ資本論争の争点の 1 つとなった資本逆行及び技術の再転換と、Samuelson（1962）の代理生産関数に対するネオ・リカーディアンの批判を整理する。続いて、資本が複数の再生産可能財から成る場合の妥当な定式化として、複数の代替的な生産技術の存在するレオンチェフ生産経済モデルを想定し、要素価格均等化の成立について論ずる。第 1 に、財が 2 種類の場合、要素価格均等化の成立は要素集約度の逆転が生じない事が必要十分である事を論証する。すなわち、この場合には、要素価格均等化定理は成立する。同時に、資本が複数の再生産可能財から成る場合、資本集約度の逆転現象は極めて普遍的に起きる事であって、その現象の排除が必要十分であるとは、事実上、要素価格均等化の成立不可能性を意味する事について、論ずる。第 2 に、資本集約度が逆転しないとしても、資本が再生産可能財である場合、要素価格均等化定理は必ずしも成立しないことを 4 財モデルの数値例を用いて示す。

第 4 節では、資本論争後の新古典派経済学者からの議論として、Samuelson（1965、

1975）および Burmeister (1978) に言及する。特に Burmeister (1978) は、資本が再生産可能財から成るという想定下での要素価格均等化問題について論じているが、本質的にはそれらの財の複数性に起因する困難性を回避し得るモデルで議論しており、以降の新古典派 HOS 貿易理論の諸研究も、総じてケンブリッジ資本論争で指摘された問題点を回避し続けている旨を指摘する。また、Burmeister (1978) が提示した要素価格均等化の成立条件は、3 節で考察した経済モデルでは適用できない事を確認する。

なお、本稿を通じて以下のことが仮定されている。１）直接的な生産費以外の費用（輸送費など）をかけることなく国際貿易が可能であり、2）自由貿易が行われており完全特化は生じなく全ての国で全ての財が生産されている、3）結合生産は行われない。

2　資本が本源的要素である場合の HOS モデル

本節では、資本を労働と同様の本源的生産要素である、と見做す標準的 HOS 貿易理論を考察する。要素賦存量の相違によって比較優位構造を定義づけ、要素価格均等化定理の原形を提唱したのはヘクシャーとオリーンであったが[*7]、一般均衡理論を用いて定式化したのは Samuelson（1953）である。続いてサミュエルソンの定式化を修正した Gale and Nikaido (1965）および Nikaido (1968)、要素集約度を要素費用の相対シェアから定義した Samuelson (1966a) および Nikaido (1972)、そしてその一般化である Mas-Collel (1979a, b) を考察する。さらに、ヤコビアンを用いずに要素価格均等化定理の条件付けを行なった Kuga (1972)、規模に関して収穫逓減および中間財の存在も許容し Kuga (1972) をさらに一般化した Blackorby et al. (1993) も採り上げる。

2.1　Samuelson (1953)

2 国 2 財 2 要素モデルにおいて要素価格均等化定理を証明した Samuelson (1948, 1949) に続き、Samuelson (1953) では一般均衡論を用いてモデルの拡張が行われている。n 個の最終財と本源的生産要素が存在する経済を考える。Samuelson (1953) で提示されているモデルを簡略化して均衡条件を定義すれば、以下の 3 つの式を満たさなければならない。

$$\mathbf{p} \leqq \mathbf{wA}(\mathbf{w}), \tag{1}$$

$$[\mathbf{p} - \mathbf{wA}(\mathbf{w})]\,\mathbf{X} = 0, \tag{2}$$

*7 Hechscher and Ohlin (1991) をみよ。

$$\mathbf{A}(\mathbf{w})\mathbf{X} = \mathbf{V}, \tag{3}$$

ただし、$i,j = 1,2,\cdots,n$ であり、$\mathbf{p} \equiv [p_j] \geq \mathbf{0}$、$\mathbf{w} \equiv [w_i] \geq \mathbf{0}$、$\mathbf{X} \equiv [X_j] \geq \mathbf{0}$、$\mathbf{A}(\mathbf{w}) \equiv [a_{ij}(\mathbf{w})] \geq \mathbf{0}$、$\mathbf{V} \equiv [V_i] \geq \mathbf{0}$ は、それぞれ財価格（行）ベクトル、要素価格（行）ベクトル、産出（列）ベクトル、要素価格ベクトル $\mathbf{w}$ の下での単位当たりのコストを最小化させる技術を示す $n \times n$ 投入係数行列、投入要素賦存（列）ベクトルである。$\mathbf{wA}(\mathbf{w})$ は単位当たり費用関数である。（1）式は競争均衡価格が満たさなければならない条件であり、（2）式は最終財市場の均衡条件、（3）式は投入要素の完全利用条件である。

ここで生産が新古典派生産関数 $X_j = f_j(V_{1j},\cdots,V_{nj})$ に従うと仮定しよう[*8]。したがって、1 次同次性より以下の変型が成立する。

$$1 = f_j(a_{1j},\cdots,a_{nj})\text{、但し } a_{ij} \equiv \frac{V_{ij}}{X_j}\text{。} \tag{4}$$

関数 f_j は以下の性質を満たす。

$$\frac{w_i}{p_j} \geqq \frac{\partial f_j(a_{1j},\cdots,a_{nj})}{\partial a_{ij}} \text{ for } i,j = 1,\cdots,n, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial a_{ij}} \geqq 0.$$

f_j は無償廃棄性（free disposal) を有すと仮定する。さらに相異なる投入要素ベクトル $\mathbf{V}'_j \equiv \left(V'_{1j},\cdots,V'_{nj}\right)$ と $\mathbf{V}''_j \equiv \left(V''_{1j},\cdots,V''_{nj}\right)$ および $\lambda \in (0,1)$ なる任意の実数に対して以下が成立する。

$$f_j\left(\lambda\mathbf{V}'_j + (1-\lambda)\mathbf{V}''_j\right) \geqq \lambda f_j\left(\mathbf{V}'_j\right) + (1-\lambda) f_j\left(\mathbf{V}''_j\right)\text{。} \tag{6}$$

式（6）は生産関数 f_j が凹関数であることを意味している。全ての財が生産され、全ての要素が全ての産業で利用されている場合、式（1）と式（5）において等号が成立する。

ここで単位当たり費用関数を $c(\mathbf{w}) \equiv \mathbf{wA}(\mathbf{w}) = [c_j(\mathbf{w})]$ としよう。すなわち、$c_j(\mathbf{w}) \equiv \sum_{i=1}^{n} w_i a_{ij}(\mathbf{w})$ であり、これはベクトル $\mathbf{wA}(\mathbf{w})$ の第 j 成分を示す。新古典派生産関数が想定される場合、費用関数 $c(\mathbf{w})$ は以下の性質を満たすことが知られている[*9]。

仮定 2.1.1：$c(\mathbf{w})$ は $\mathbf{w}$ に関して微分可能である。

[*8] 新古典派生産関数については、Bermeister and Dobell (1970, pp. 8–12) を見よ。
[*9] 例えば、Mas-Collel et al. (1995, p. 141) をみよ。

仮定 2.1.2：$c(\mathbf{w})$ は $\mathbf{w}$ について 1 次同次関数である。

仮定 2.1.3：$c(\mathbf{w})$ は $\mathbf{w}$ に関する凹関数である。

仮定 2.1.4：$c(\mathbf{w})$ は $\mathbf{w}$ の単調増加関数である。

要素価格均等化の成立は、財価格ベクトル $\mathbf{p}$（自由貿易によって決定されると考える）と投入要素価格ベクトル $\mathbf{w}$ との写像 c が **大域的単葉性**（*global univalence*）を有することにほかならない。直観的に理解しやすいので、以下では $n=2$ としよう。この場合、**要素価格均等化定理** とは、**要素集約度の逆転が生じない** 前提下で、自由貿易均衡下での要素価格が各国間で均等化する事を主張するものである。ここで、要素集約度は第 1 部門では $a_{11}(\mathbf{w})/a_{21}(\mathbf{w})$ であり第 2 部門では $a_{12}(\mathbf{w})/a_{22}(\mathbf{w})$ である。要素集約度の逆転が生じない事とは、$a_{11}(\mathbf{w})/a_{21}(\mathbf{w})$ と $a_{12}(\mathbf{w})/a_{22}(\mathbf{w})$ の大小が $\mathbf{w}$ の変化に対して常に不変である場合、つまり、

$$\begin{cases} \forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\, a_{11}(\mathbf{w})\, a_{22}(\mathbf{w}) - a_{12}(\mathbf{w})\, a_{21}(\mathbf{w}) > 0 \quad \text{または} \\ \\ \qquad \forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\, a_{11}(\mathbf{w})\, a_{22}(\mathbf{w}) - a_{12}(\mathbf{w})\, a_{21}(\mathbf{w}) < 0; \end{cases} \tag{7}$$

の場合を指す。このとき、要素価格均等化が成立する。なぜならば、この場合、不完全特化貿易均衡下の均衡財市場価格 $\mathbf{p}$ に対応する価格方程式 $\mathbf{p} = \mathbf{w}\mathbf{A}(\mathbf{w})$ の行列 $\mathbf{A}(\mathbf{w})$ は非特異であるので、逆行列 $\mathbf{A}(\mathbf{w})^{-1}$ が存在して $\mathbf{w} = \mathbf{p}\mathbf{A}(\mathbf{w})^{-1}$ となる。この場合、費用関数の値域 $\mathcal{P} \equiv \left\{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n_+ \mid \exists \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_+ : c(\mathbf{w}) = \mathbf{p}\right\}$ に関して、$c(\mathbf{w})$ は全単射である事を示す事が出来る[*10]。すなわち、c は大域的単葉性を有する。他方、要素集約度の逆転がある場合、すなわち (7) 式が満たされない場合、関数の連続性より、ある要素価格ベクトル $\mathbf{w}'$ に対応する選択された生産技術体系 $\mathbf{A}(\mathbf{w}')$ に関して $a_{11}(\mathbf{w}')\, a_{22}(\mathbf{w}') - a_{12}(\mathbf{w}')\, a_{21}(\mathbf{w}') = 0$ となる。このとき、仮に不完全特化貿易均衡下の均衡財市場価格が $\mathbf{p}' = \mathbf{w}'\mathbf{A}(\mathbf{w}')$ となる場合には、行列 $\mathbf{A}(\mathbf{w}')$ が特異になる為、逆行列は存在せず、この方程式を満たす要素価格ベクトルは無数に存在する。すなわち、要素価格均等化が成立しなくなるのである。

ここで費用関数 $c_j(\mathbf{w})$ を w_i に関して偏微分すれば、$\frac{\partial p_j}{\partial w_i} = \frac{\partial c_j(\mathbf{w})}{\partial w_i} = a_{ij}(\mathbf{w}) + \sum_{h=1}^{2} w_h \frac{\partial a_{hj}(\mathbf{w})}{\partial w_i}$ となる。（4）式を微分すれば $\sum_{h=1}^{2} \frac{\partial f_j}{\partial a_{hj}} \frac{\partial a_{hj}}{\partial w_i} = 0$ が得られるが、（5）式より $\frac{\partial f_j}{\partial a_{hj}} = \frac{w_h}{p_j}$ なので $\frac{1}{p_j} \sum_{h=1}^{2} w_h \frac{\partial a_{hj}(\mathbf{w})}{\partial w_i} = 0$ となる。したがって、$p_j > 0$ より、

$$\frac{\partial p_j}{\partial w_i} = a_{ij}(\mathbf{w}), \quad i, j = 1, 2 \tag{8}$$

[*10] 詳細は補論 7.1 節を参照せよ。。

となる。つまり、財 j の生産に必要となる投入要素 i — a_{ij} — は偏微分によって得られる。Samuelson (1953) は (7) 式の条件が成立するためには (1) 式のヤコビアンがゼロではない、つまり任意の $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$ に対して $\det \begin{bmatrix} a_{11}(\mathbf{w}) & a_{12}(\mathbf{w}) \\ a_{21}(\mathbf{w}) & a_{22}(\mathbf{w}) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial c_2(\mathbf{w})}{\partial w_1} \\ \frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_2} & \frac{\partial c_2(\mathbf{w})}{\partial w_2} \end{bmatrix} \neq 0$ が要素価格均等化定理が成立するための十分条件であるとした。

以上の結果を $n > 2$ のケースに一般化して、Samuelson（1953）は要素価格均等化定理の十分条件を以下のように推論した。

$$\frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_1} \neq 0, \det \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_1} & \frac{\partial c_2(\mathbf{w})}{\partial w_1} \\ \frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_2} & \frac{\partial c_2(\mathbf{w})}{\partial w_2} \end{bmatrix} \neq 0, \cdots, \det \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial c_n(\mathbf{w})}{\partial w_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial c_1(\mathbf{w})}{\partial w_n} & \cdots & \frac{\partial c_n(\mathbf{w})}{\partial w_n} \end{bmatrix} \neq 0。 \tag{9}$$

すなわち、費用関数のヤコビアンの狭義首座小行列式がゼロではないというのが要素価格均等化定理の十分条件と推論したのである[*11]。

さらに、Samuelson (1953) はこの条件が新古典派生産関数のみならずレオンチェフ型生産関数を想定している場合にも妥当すると主張した。なぜなら、レオンチェフ型生産関数の場合、(8) 式は $\frac{\partial p_j}{\partial w_i} = a_{ij}$ となり固定係数によって表わされ、$\mathbf{w}$ が変化してもヤコビアンの符号が逆転することはありえないためである。

Samuelson (1953) は要素価格均等化定理やストルパー・サミュエルソン定理の成立条件の議論においてヤコビアンに注目するというそれ以降の研究方向に大きな影響を与えた論文と評価してよい[*12]。

2.2 ヤコビアンの応用

Gale and Nikaido (1965)、Nikaido (1968) は上記の Samuelson (1953) の推論に含まれる誤謬を指摘した[*13]。準備段階として、以下の様な行列を定義しよう。

[*11] 「狭義首座小行列式」とは首座小行列式のうち左上隅から順に行と列を選んでつくった小行列式のことである。小山（2010, p. 338）を参照。

[*12] Samuelson (1953) 以外の一般均衡理論に基づいた HOS モデルに関しては、Chipman (1966) を参照されたい。

[*13] Gale and Nikaido (1965) はサミュエルソンの条件に対する反例を挙げている。例えば、$F \equiv [f_i(\mathbf{x})]$ によって定義される写像 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が以下のように与えられるとする：

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = e^{2x_1} - x_2^2 + 3, \\ f_2(x_1, x_2) = 4e^{2x_1}x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

定義 2.2.1：正方行列 $\mathbf{A}$ の全ての首座小行列式が正であるとき $\mathbf{A}$ を P 行列と言う。

定義 2.2.2：正方行列 $\mathbf{A}$ の全ての首座小行列式が負であるとき $\mathbf{A}$ を N 行列と言う。さらに、N 行列は 2 つのカテゴリーに区別することができる。

N 行列の第 1 カテゴリー：N 行列 $\mathbf{A}$ が少なくとも 1 つの正の成分を持つ。
N 行列の第 2 カテゴリー：N 行列 $\mathbf{A}$ の全ての成分が非負である。

また、写像 $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ を、以下の条件を満たすものとする。

仮定 2.2.1：Ω は $\mathbb{R}^n$ における閉矩形領域（closed rectangular region) である[*14]。

仮定 2.2.2：$f(\mathbf{x})\equiv[f_j(\mathbf{x})]$ $(\mathbf{x}\in\Omega, j=1,2,\cdots,n)$ として、$f_j(\mathbf{x})$ は Ω において単調増加し全微分可能である。つまり、

$$\mathrm{d}f_j(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i,(j=1,2,\cdots,n)$$

が成立する。

このとき、以下の定理が成立する。

定理 1（Gale and Nikaido 1965; Inada 1971; Nikaido 1968）: 所与のベクトル $\mathbf{p}\equiv[p_j]$ に対して写像 $\mathbf{p}=f(\mathbf{x})$ が大域的単葉性を有するのは以下の 2 つのどちらかが成立する場合である。

1. 写像 f のヤコビアンが Ω 上において常に P 行列である。
2. 写像 f のヤコビアンが連続で Ω 上において常に N 行列である。

狭義首座小行列式は任意の実数 x_1,x_2 に対して

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=2e^{2x_1}>0,$$
$$\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2\\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2e^{2x_1} & -2x_2\\ 8e^{2x_1}x_2 & 4e^{2x_1}-3x_2^2\end{vmatrix}=2e^{2x_1}\left(4e^{2x_1}+5x_2^2\right)>0$$

となり、サミュエルソンの条件を満たしている。しかし、$(x_1,x_2)=(0,-2)$ および $(0,2)$ は、共に $(0,0)=F(x_1,x_2)$ に写され、大域的単葉性は維持されない。

[*14] 閉矩形領域とは以下を意味している。

$$\Omega\equiv\{\mathbf{x}|\,p_i\leqq x_i\leqq q_i, i=1,2,\cdots,n\}、$$

ただし、$-\infty<p_i<q_i<+\infty$ である。

証明. Nikaido (1968, pp. 370–371) を見よ。 ■

Ethier (1984, p. 151) が指摘するように、Gale and Nikaido (1965) において写像 f に課された仮定は非常に一般的なものであり、得られた大域的単葉性の条件も純数学的なものである。したがって、通常の経済学的な制約の下で、費用関数に如何なる条件を課す事が、その大域的単葉性を保証するのかを明らかにしなければならない。

Samuelson (1966a) が新たな推論を提示した。この推論では、「要素集約度」は単位当たり費用増加率に対する相対的な要素費用増加率のシェアによって定義されている。つまり、価格方程式 $\mathbf{p} = c(\mathbf{w})$ に対して要素集約度 α_{ij} は

$$\alpha_{ij} \equiv \frac{c_{ij}(\mathbf{w})\, w_i}{p_j}, (\forall i, j = 1, \ldots, n)$$

と定義される。但し、$c_{ij}(\mathbf{w}) \equiv \frac{\partial c_j(\mathbf{w})}{\partial w_i}$ である。α_{ij} は財 j の生産費用増加率に占める要素 i の費用増加率の相対シェアである。ここで、相対シェア行列 $\widetilde{\mathbf{A}} \equiv [\alpha_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ を定義しよう[*15]。行列 $\widetilde{\mathbf{A}}$ の行と列を適切に入れ替えれば、$\widetilde{\mathbf{A}}$ の狭義首座小行列式の絶対値が下に有界である、つまり、ある正数 δ_k $(k = 1, 2 \cdots, n)$ が存在して

$$\left| \det \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} \end{bmatrix} \right| \geqq \delta_k,\ k = 1, 2 \cdots, n \tag{10}$$

が満たされると仮定しよう[*16]。このとき以下の定理が成立する。

定理 2（Nikaido 1972）：$c_j(\mathbf{w})$ が仮定 2.1.1～2.1.4 および（10）式が満たされるとき、所与の価格（正）ベクトル $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ に対して価格方程式 $\mathbf{p} = c(\mathbf{w})$ は完全可逆的（completely invertible) である[*17]。

証明. 補論を参照せよ。 ■

定理 2 は Samuelson（1966a）の推論が正しいことを証明している[*18]。

[*15] 明らかに $\alpha_{ij} \geqq 0$ であり、費用関数の一次同次性とオイラー定理より $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$ になることが容易に確認することができる。したがって、$\widetilde{\mathbf{A}}$ は確率行列（stochastic matrix）である。

[*16] （10）式は 2 財 2 要素モデルの場合（7）式と同値である。

[*17] 完全可逆的とは、相異なる任意の正ベクトル $\mathbf{w}$、$\mathbf{w}'$ に対して $\mathbf{p} = c(\mathbf{w}) \neq c(\mathbf{w}') = \mathbf{p}'$ であり、かつ任意の $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ に関して一意の $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ が存在して $\mathbf{p} = c(\mathbf{w})$ である。

[*18] サミュエルソン自身による要素価格均等化定理に関する総括は Samuelson (1967) に示されている。また、Stiglitz (1970) は貯蓄投資を導入し動学的 HOS モデルを構築し、要素価格均等化定理を導出している。動学的 HOS モデルの詳細については Smith (1984) を参照されたい。

周知のように、Stolper and Samuelson (1941) もまた財価格と投入要素価格の関係を問うものであり、ヤコビアンを用いたアプローチはストルパー・サミュエルソン定理の一般化に応用された。Stolper and Samuelson (1941) は 2 財 2 要素モデルであるため要素集約度を定義するにあたって何の困難も生じないが、要素の数が 2 を超えた場合、条件（7）式のように定義することはできない。

そこで、上記の行列 $\widetilde{\mathbf{A}}$ による「要素集約度」の定義は、ストルパー・サミュエルソン定理の一般化にも応用されるようになった。Chipman (1969) はその代表的な業績であり、彼は以下のような 2 つの基準を提示した。

基準 1 Weak Stolper-Samuelson Criterion（WSS 基準）：p_j の上昇がそれに対応する投入要素価格 w_j を比例的以上に上昇させる。その他の投入要素価格 $w_i\,(i \neq j)$ は上昇するかもしれないが、その上昇率は w_j のそれよりも小さい。つまり、

$$\frac{\partial \ln w_j}{\partial \ln p_j} > 1,\ \frac{\partial \ln w_j}{\partial \ln p_j} > \frac{\partial \ln w_i}{\partial \ln p_j} \quad \text{である。}$$

基準 2 Strong Stolper-Samuelson Criterion（SSS 基準）：p_j の上昇は w_j 以外の全ての投入要素価格 w_i $(i \neq j)$ を低下させる。つまり、

$$\frac{\partial \ln w_i}{\partial \ln p_j} < 0, \quad \text{if } i \neq j \text{ である。}$$

したがって、WSS 基準を満たすためには、$\widetilde{\mathbf{A}}$ の逆行列が存在し、その対角要素が 1 より大きくかつ非対角要素より大きくなければならない[*19]。つまり、$\widetilde{\mathbf{A}}^{-1} \equiv \left[\alpha^{ij}\right]$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ とすれば、WSS 基準は $\alpha^{jj} > 1$ かつ $\alpha^{jj} > \alpha^{ij}\,(i \neq j)$ である。同様

[*19] Chipman (1969) は Gale and Nikaido (1965) で与えられる要素価格均等化定理と WSS 基準との関係を論じている。$n = 2$ である場合には要素価格均等化定理の成立と WSS 基準の成立は同値であるが、$n \geqq 3$ になると必ずしもそうではない。ある財価格ベクトル $\mathbf{p}^0$ に対して $\mathbf{w}^0$ が定まり $\pi^0 = \varphi\left(\omega^0\right)$ が成立したとする。そのヤコビアンを

$$\varphi'\left(\omega^0\right) = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.40 & 0.05 \\ 0.05 & 0.50 & 0.45 \\ 0.25 & 0.35 & 0.40 \end{bmatrix}$$

とする。$\varphi'\left(\omega^0\right)$ は確率行列になっている。他方、$\varphi\left(\omega\right)$ は微分可能な単調増加関数であり、$\varphi'\left(\omega^0\right)$ の全ての首座小行列式は正、つまり $\varphi'\left(\omega^0\right)$ は P 行列なので、定理 1 を満たしている。したがって、要素価格均等化定理は成立している。しかし、

$$\left[\varphi'\left(\omega^0\right)\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.77 & -2.59 & 2.82 \\ 1.68 & 3.77 & -4.45 \\ -1.95 & -1.68 & 4.64 \end{bmatrix}$$

となって、WSS 基準は満たされない。

に、SSS 基準を $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1}$ のタームで表わせば $\alpha^{ij} < 0$ $(i \neq j)$ である。Chipman (1969) は $n \leqq 3$ の場合しか厳密な証明を与えていないが、Uekawa (1971)、Uekawa et al. (1972) は、Chipman (1969) に基づきながら、$n > 3$ のケースにおいてもストルパー・サミュエルソン定理が成立する条件を厳密に証明している*20。

2.3 Kuga (1972)

これまでのアプローチは財と投入要素の数が一致する場合にしか適用できないという弱点を有している。Kuga (1972) はその弱点を克服するために、新たなアプローチで要素価格均等化定理の条件付けを行った。久我自身はそれを「differentiation method」と呼んでいる。以下のような一般的な生産可能フロンティアを仮定しよう。

$$X_1 = T\left(\mathbf{V};\mathbf{X}\right),$$

X_1 は財 1 の産出量を、$\mathbf{V} \in \mathbb{R}_+^r$ は（3）式と同様に要素賦存を、$\mathbf{X} \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ は財 2 から財 n までの産出量を示している。T に関して以下の条件を仮定する。

仮定 2.3.1：T は $(\mathbf{V};\mathbf{X})$ に関して 1 次同次である。

仮定 2.3.2：T は $(\mathbf{V};\mathbf{X})$ に関して凹関数である。

仮定 2.3.3：T は所与の $\mathbf{V}$ に対して $\mathbf{X}$ の狭義の凹関数である。

仮定 2.3.4：T は $(\mathbf{V};\mathbf{X})$ に関して連続で 2 回微分可能である。

財 1 の価格をニュメレールにしよう。ここで解くべき問題は以下のとおりである。

$$\max_{X_j} T\left(\mathbf{V};\mathbf{X}\right) + \sum_{j=2}^{n} p_j X_j, \tag{11}$$

解は以下で与えられる。

$$p_j = -\frac{\partial T\left(\mathbf{V};\mathbf{X}\right)}{\partial X_j}, \quad j = 2, 3, \cdots, n, \tag{12}$$

したがって、Berge の最大値定理より所与の価格ベクトル $\mathbf{p}$ の下で（11）式の解 X_j $(j = 2, 3, \cdots, n)$ の集合は投入要素ベクトル $\mathbf{V}$ の優半連続となる。さらに、仮定 2.3.3 よ

*20 同様のストルパー・サミュエルソン定理の一般化は、Inada (1971)、Kemp and Wegge (1969)、森嶋 (2004)、Wegge and Kemp (1969) などでも行われている。同定理に関する研究は Ethier (1984) や高増（1991）に詳しい。

り、その集合は singleton になり、結局、(11) 式の解 X_j は $\mathbf{V}$ の連続一価関数となる。つまり、

$$\mathbf{X} = X(\mathbf{V};\mathbf{p})$$

である。投入要素 i の価格は以下で与えられる。

$$w_i = \frac{\partial T(\mathbf{V}; X(\mathbf{V};\mathbf{p}))}{\partial V_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{13}$$

このモデルにおける要素価格均等化定理の成立とは、要素価格 w_i が自由貿易によって決定される財価格のみに依存し、$\mathbf{V}$ の変化に対して (13) 式の右辺が不変に保たれることである。

(13) 式を V_τ $(\tau = 1, 2, \cdots, r)$ で偏微分すれば以下を得る。

$$\frac{\partial w_i}{\partial V_\tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial V_\tau \partial V_i} + \sum_{j=2}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial X_j \partial V_i}\frac{\partial X_j}{\partial V_\tau}, \quad \tau = 1, 2, \cdots, r. \tag{14}$$

行列表示に直せば、

$$\mathbf{w}_V = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{X}_V, \tag{15}$$

となる。それぞれの表記は以下の通りである。

$$\mathbf{w}_V \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial w_r}{\partial V_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_1}{\partial V_r} & \cdots & \frac{\partial w_r}{\partial V_r} \end{bmatrix}, \mathbf{M}_1 \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial V_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial V_1 \partial V_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial V_r \partial V_1} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial V_r^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}_2 \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial V_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial V_1 \partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial V_r \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial V_r \partial X_n} \end{bmatrix}, \mathbf{X}_V \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial V_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial V_1} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial V_r} \end{bmatrix}.$$

同様に、(12) 式を V_τ で偏微分すれば、

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X_j \partial V_\tau} + \sum_{l=2}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial X_l \partial X_j}\frac{\partial X_l}{\partial V_\tau} = 0, \quad j = 2, 3, \cdots, n, \tau = 1, 2, \cdots, r \tag{16}$$

となる。行列表示では、$\mathbf{M}_2^T + \mathbf{M}_3 \mathbf{X}_V = \mathbf{0}$ である。ただし上付き文字 T は転置を示し、

$\mathbf{M}_3 \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 T}{\partial X_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial X_2 \partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 T}{\partial X_n \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 T}{\partial X_n^2} \end{bmatrix}$ である。上記の仮定 2.3.3 よりヘッセ行列 $\mathbf{M}_3$ は逆行列を持ち $\mathbf{X}_V = -\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{M}_2^T$ となり[*21]、これと（15）式より以下を得る。

$$\mathbf{w}_V = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{M}_2^T. \tag{17}$$

したがって、要素価格均等化定理が成立するためには $\mathbf{w}_V = \mathbf{0}$、つまり

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2\mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{M}_2^T \tag{18}$$

が満たされなければならない。

（17）式、（18）式の経済学的意味は次のように解釈できる。（12）式を p_j で偏微分することによって $1 = -\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial X_k \partial X_j} \frac{\partial X_k}{\partial p_j}$ となり、行列表示では

$$\mathbf{I} = -\mathbf{M}_3\mathbf{X}_p \tag{19}$$

となる。ただし、$\mathbf{I}$ は $n-1$ 次の単位行列、$\mathbf{X}_p \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_n}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial X_n}{\partial p_n} \end{bmatrix}$ である。同様に（13）式を p_j で偏微分すると $\frac{\partial w_i}{\partial p_j} = \sum_{l=2}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial X_l \partial V_i} \frac{\partial X_l}{\partial p_j}\ (i = 1, 2, \cdots, r, j = 1, 2, \cdots, n)$ となり、行列表示では

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{M}_2\mathbf{X}_p \tag{20}$$

となる。ただし、$\mathbf{w}_p \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial w_1}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_r}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial w_r}{\partial p_n} \end{bmatrix}$ である。（19）式より $\mathbf{M}_3^{-1} = -\mathbf{X}_p$、（20）式より $\mathbf{M}_2 = \mathbf{w}_p\mathbf{X}_p^{-1}$ なので（17）式より

$$\mathbf{w}_V = \mathbf{M}_1 + \mathbf{w}_p\mathbf{M}_2^T \tag{21}$$

を得る。

[*21] 仮定 2.3.3 より T は $\mathbf{X}$ に関して狭義の凹関数と仮定されているので、そのヘッセ行列は負値（negative definite）である。正方行列が負値になるのはその逆行列が負値になるときのみである。ゆえに $\mathbf{M}_3$ は逆行列を持つ。Mas-Colell et al. (1995, pp. 933–936) を参照されたい。

要素賦存量の変化は、一般に要素価格と産出量を変化させる。$\mathbf{M}_1$ の成分 $\frac{\partial^2 T}{\partial V_i \partial V_\tau}$ は、（14）式から明らかなように、V_τ の増加に対して産出の調整が起こらない場合（$\frac{\partial X_j}{\partial V_\tau}=0$）の要素価格の変化を示している。同様に、$\mathbf{M}_2$ の成分 $\frac{\partial^2 T}{\partial V_\tau \partial X_j}$ は、（16）式から明らかなように、V_τ の増加に対して産出量の調整が起こらない場合（$\frac{\partial X_l}{\partial V_\tau}=0$）の世界市場価格と国内生産価格の乖離を示している。他方で、$\mathbf{w}_p$ の成分は、その価格乖離に対応した産出量の調整を伴った要素価格の調整を示している。ゆえに、（21）式における $\mathbf{w}_p\mathbf{M}_2^T$ は、価格乖離に対応した産出量の調整を通じて生じた要素価格の変化を表していると解釈できる。久我は、スルツキー分解に倣い、（21）式における $\mathbf{M}_1$ を「直接効果 (direct effect)」、$\mathbf{w}_p\mathbf{M}_2^T$ を「調整効果 (adjustment effect)」と呼んで分解している。したがって、このモデルにおいて要素価格均等化が成立する（$\mathbf{w}_V=\mathbf{0}$）には、直接効果と調整効果がちょうど相殺されなければならない。つまり、$\mathbf{M}_1=-\mathbf{w}_p\mathbf{M}_2^T$ が成立するときである。以上の議論をまとめれば、以下のようになる。

定理 3：仮定 2.3.1～2.3.4 の下で、要素価格均等化が成立するのは、直接効果と調整効果が相殺されるとき、そのときのみである。

久我のモデルにおける要素価格均等化定理の成立は、要素価格が要素賦存量から独立することによって保証される。こうしたアプローチはこれまでのモデルとは全く異なるものである。また既に指摘したように、このモデルでは財の数と投入要素の数が一致しないケースを他のモデルと比べてもそれほど厳しい仮定を課すことなく扱っている。この点も評価されるべきであろう。

2.4 Mas-Colell (1979a, b)

Mas-Colell (1979a, b）も、費用関数のヤコビアンではなく、相対シェア行列 $\widetilde{\mathbf{A}}$ の行列式から要素価格均等化の条件付けを行っている。費用関数に関して以下の仮定を課す。

仮定 2.4.1：$c(\mathbf{w})$ は連続で 1 回微分可能な 1 次同次関数である。

仮定 2.4.2：$c:\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}^n_{++}$

通常、費用関数は、要素価格 $\mathbf{w}$ に関して凹関数である、と仮定されるが、ここでは 1 次同次性だけが仮定され、凹関数とは限定されていない。仮定 2.4.2 は、等費用曲線が非有界であることを、意味している。WSS 基準の際に定義したように、相対シェアは費用関数と以下のような関係にある。

$$\alpha_{ij} \equiv \frac{w_i}{c_j(\mathbf{w})} \frac{\partial c_j(\mathbf{w})}{\partial w_i}.$$

このとき、以下の定理が成立する。

定理 4（Mas-Colell, 1979a）：上記の仮定 2.4.1〜2.4.2 の下で、ある ε が存在して任意の $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n_{++}$ に対して $\left|\det \widetilde{\mathbf{A}}\right| > \varepsilon$ となれば、$c(\mathbf{w})$ は同相写像（homeomorphism) である。

つまり、定理 4 は、仮定 2.4.1〜2.4.2 の下では任意の $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ に対して $\mathbf{p} = c(\mathbf{w})$ は一意の解 $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ を持ち、それは $\mathbf{p}$ に連続的に依存することを意味している。

証明. 補論を参照せよ。■

さらに、Mas-Colell (1979a) は、等費用曲線が有界であるケース（つまり、$c_j : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$）においても、費用関数が同相写像になるための条件を、相対シェア行列を用いて求めている。

マスコーレルの費用関数の設定は、Nikaido (1972）の一般化であるが、違いは Mas-Collel (1979a,b) の設定の下では、財価格空間と要素価格空間が同相であることを示した点である。Nikaido (1972) では、費用関数の 1 次同次性と凹性より、その完全可逆性を定理として導いたが、完全可逆性は逆写像の連続性を要求しない。付言すれば、大域的単葉性も逆写像の連続性は要求しない。

2.5 Blackorby et al. (1993)

Blackorby et al. (1993) は Kuga (1972) の一般化である。2.3 節で考察したように、Kuga (1972) は規模に関して収穫不変の下で要素価格均等定理の成立を要素価格が自由貿易によって決定される財価格にのみ依存し、各国の要素賦存量の変化から独立することとして定式化した。Blackorby et al. (1993) は結合生産と規模に関して収穫逓減を許容する技術の下で要素価格が財価格にのみ依存し、要素賦存量から独立するための必要十分条件を導出している。

世界経済は C 個の国から成り立っており、各国を $c = 1, \cdots, C$ のインデックスで表わす。自由貿易される M 個の消費財が存在し、貿易されない N 個の本源的要素が各国に賦存している。c 国の生産ベクトルを $\mathbf{X}^c \in \mathbb{R}^M$ で表わし、その正の成分は産出を意味し、負の成分は投入を意味する。c 国の本源的要素を $\mathbf{V}^c \in \mathbb{R}^N$ で表わす。変形関数

$T^c:\mathbb{R}^{M+N}\to\mathbb{R}$ が $T^c(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)\leqq 0$ を満たすとき、そのときのみ $(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)$ は実行可能である。T^c に関して以下の仮定を課す。

仮定 2.5.1：(i) $D^c\equiv\left\{(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)\in\mathbb{R}^{M+N}\middle|\,T^c(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)\leqq 0\right\}$ は非空閉凸集合であり、$(0,0)\in D^c$；(ii) 任意の $\mathbf{X}^c\in\mathbb{R}^M$ に関して T^c は増加関数であり、任意の $\mathbf{V}^c\in\mathbb{R}^N$ に関して減少関数である；(iii) T^c は任意の $(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)\in\mathbb{R}^{M+N}$ に関して凸である。

仮定 2.5.2：T^c は連続で 2 回微分可能である。

変形関数は生産関数 G^c と以下の関係がある。

$$T^c(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)=0\Longleftrightarrow\mathbf{Y}^c=G^c(\mathbf{Z}^c,\mathbf{V}^c).$$

$\mathbf{X}^c\equiv(\mathbf{Y}^c,\mathbf{Z}^c)$ である。$\mathbf{Y}^c$ は純産出を表わし、$\mathbf{Z}^c$ は純投入を表わす。仮定 2.5.1 より G^c は凹関数、$\mathbf{Z}^c$ に関して減少関数、$\mathbf{V}^c$ に関して増加関数である。したがって、以下の 2 つの問題は同じ利潤最大化問題の異なった表現である。

$$R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)=\max_{\mathbf{X}^c}\{\mathbf{p}\mathbf{X}^c|\,T^c(\mathbf{X}^c,\mathbf{V}^c)\leqq 0\},\tag{22}$$

$$R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)=\max_{\mathbf{Y}^c,\mathbf{Z}^c}\{\mathbf{p}^y\mathbf{Y}^c+\mathbf{p}^z\mathbf{Z}^c|\,\mathbf{Y}^c\leqq G^c(\mathbf{Z}^c,\mathbf{V}^c)\}.\tag{23}$$

$\mathbf{p}\equiv(\mathbf{p}^y,\mathbf{p}^z)$ は価格ベクトルである。利潤関数が一般的に満たす性質は（22）式と（23）式においても成立する。すなわち、$R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)$ は $\mathbf{p}$ に関して一次同次、非減少凸関数であり、$\mathbf{V}^c$ に関して増加凹関数である。

c 国における均衡要素価格を $\mathbf{W}^c\in\mathbb{R}^N$、均衡生産ベクトルを $\mathbf{X}^{c*}$ とすれば、

$$\mathbf{W}^c\begin{cases}=\nabla_{\mathbf{V}}R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)\,,R^c\text{が微分可能のとき}\\ \in\partial_{\mathbf{V}}R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)\,,R^c\text{が微分不能のとき}\end{cases}\tag{24}$$

$$\mathbf{X}^{c*}\begin{cases}=\nabla_{\mathbf{p}}R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)\,,R^c\text{が微分可能のとき}\\ \in\partial_{\mathbf{p}}R^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)\,,R^c\text{が微分不能のとき}\end{cases}\tag{25}$$

である。$\partial_iR^c(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)$ は点 $(\mathbf{p},\mathbf{V}^c)$ における $i=\mathbf{p},\mathbf{V}^c$ に関する劣勾配ベクトルの集合を表わす。

ここで、要素価格均等化は以下のように定義される。

定義 2.5.1（要素価格均等化）：要素価格均等化が成立するとは、ある非空の財価格ベクトルの開凸集合 $\Pi\subseteq\mathbb{R}_+^M$ が存在し、任意の $\mathbf{p}\in\Pi$ に対して、ある非空の要素賦存の開凸集合のプロフィール $(\Gamma^c(\mathbf{p}))_{c=1,\cdots,C}$ と要素価格ベクトル $\mathbf{W}\in\mathbb{R}_+^N$ が存在

して、任意の要素賦存プロフィール $(\mathbf{V}^c)_{c=1,\cdots,C} \in \underset{c=1,\cdots,C}{\times} \Gamma^c(\mathbf{p})$ に対して、$\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{V}} R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c), (\forall c = 1, \cdots, C)$ が成立することである。

Blackorby et al. (1993) モデルにおいて重要な役割を果たす概念を定義しよう。

定義 2.5.2（線形セグメント, linear segment）：$(\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c)$ において以下を満たす $\varepsilon > 0$ が存在するとき、そのときのみベクトル $(\psi^c, \delta^c) = \left(\psi^c_y, \psi^c_z, \delta^c\right)$ は G^c の線形セグメントである。すなわち、任意の $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して

$$G^c(\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c) + \lambda\psi^c_y = G^c(\mathbf{Z}^c + \lambda\psi^c_z, \mathbf{V}^c + \lambda\delta^c).$$

定義 2.5.3（線形方向, direction of linearity）：ベクトル $(\psi^c, \delta^c) \in \mathbb{R}^{M+N}$ が $(\mathbf{X}^c, \mathbf{V}^c)$ において T^c の線形方向であるのは以下を満たす $\varepsilon > 0$ が存在するときである。すなわち、任意の $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して

$$T^c(\mathbf{X}^c + \lambda\psi^c, \mathbf{V}^c + \lambda\delta^c) = 0.$$

一般に要素賦存量の変化は生産ベクトルを変化させるが、線形方向とは δ^c の要素賦存量の変化に対して生産ベクトル $\mathbf{X}^c$ の実行可能かつ効率性を維持した下での変化が線形であることを意味している。すなわち、$\partial T^c(\mathbf{X}^c + \lambda\psi^c, \mathbf{V}^c + \lambda\delta^c) = \partial T^c(\mathbf{X}^c, \mathbf{V}^c)$ が線形方向の意味することである。したがって、線形方向にある生産ベクトルの変化は T^c の勾配ベクトルを変化させないのである。

定義 2.5.2、2.5.3 より、(ψ^c, δ^c) が G^c の線形セグメントであるとき、そのときのみ (ψ^c, δ^c) は T^c の線形方向であることは明らかである。以下では、Π と $\Gamma^c(\mathbf{p})$ が全次元的（full dimension）であると仮定する。それを $\Gamma^c_N(\mathbf{p})$ と表わす。このとき、要素価格が均等するための必要十分条件は以下の定理によって与えられる。

定理 5：仮定 2.5.1 の下で以下の 3 つの条件が成立するとき、そのときのみ $\mathbf{p} \in \mathbf{\Pi}$、$(\mathbf{V}^c)_{c=1,\cdots,C} \in \underset{c=1,\cdots,C}{\times} \Gamma^c_N(\mathbf{p})$ に対して要素価格均等化が生ずる。

1) $(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ において T^c の線形方向である N 個のベクトル $(\psi_i(\mathbf{p}), \delta_i(\mathbf{p}))$（但し、$i = 1, \cdots, N$）が存在する。

2) ベクトル $\delta_i(\mathbf{p})$ は一次独立であり、全ての国に対して同一である。

3) 写像 $\psi_i : \Pi \to \mathbb{R}^M$ が全ての国において同一である。

証明. 補論を参照せよ。 ■

定理 5 が示していることを以下のように要約できる。価格 $\mathbf{p}$ のもとで要素賦存が $\mathbf{V}^c \in \Gamma_N^c(\mathbf{p})$ である経済において i 番目の要素が $\delta_i(\mathbf{p})$ だけ変化したとする。全ての国が各々の $(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ において線形方向であるベクトル $(\psi_i(\mathbf{p}), \delta_i(\mathbf{p}))$ を持つということは、$\mathbf{X}^{c*}$ が $\psi_i(\mathbf{p})$ だけ変化したとき T^c の勾配ベクトルが不変に保たれることを意味している。N 個の一次独立なベクトル $\delta_i(\mathbf{p})$ は N 次元の空間を張るので、要素賦存のいかなる変化も N 個の線形方向に配分されることが保証される。したがって、いかなる要素賦存の局所的変化に対しても勾配ベクトル $\nabla T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ を変化させることなく生産を調整することができる。(24) 式より $\partial R^c/\partial V_i = \mathbf{p}(\partial X^{c*}/\partial V_i) = W_i$ である。定理 5 は $\partial X^{c*}/\partial V_i = \psi_i(\mathbf{p})$ が全ての国で同一になることを要求するので、要素価格が均等化する。

全ての国で均衡生産ベクトル (25) が同一でなければ要素価格が均等化しないとすれば要素価格均等化は国際貿易が起こらない状況でしか実現しないことになるが、定理 5 は各国の均衡生産ベクトルが異なるときに、すなわち自由貿易が行われている下で要素価格均等化が起こり得ることを示唆している。このことを確認するために、定理 5 の必要十分条件を各国の変形関数のヘッセ行列によって表現してみよう。

定理 6：仮定 2.5.1 と 2.5.2 の下で、$\mathbf{p} \in \Pi$ と $\mathbf{V}^c \in \Gamma_N^c(\mathbf{p})$ に対して以下の条件を満たす $\psi_i(\mathbf{p})$ が全ての国において同一になるとき、そのときのみ要素価格は均等化する。

$$\nabla_{\mathbf{XV}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c) = -\nabla_{\mathbf{XX}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)\,\boldsymbol{\Psi}, \tag{26}$$

$$\nabla_{\mathbf{VV}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c) = \boldsymbol{\Psi}^T \nabla_{\mathbf{XX}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)\,\boldsymbol{\Psi}, \tag{27}$$

$$\nabla_{\mathbf{X}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)\,\boldsymbol{\Psi} + \nabla_{\mathbf{V}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)\,\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}. \tag{28}$$

ただし、$\boldsymbol{\Psi} \equiv \begin{bmatrix} \psi_1^1(\mathbf{p}) & \cdots & \psi_N^1(\mathbf{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^M(\mathbf{p}) & \cdots & \psi_N^M(\mathbf{p}) \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{\Omega}$ は基本ベクトル δ_i を成分とする N 次の単位行列、$\nabla_{\mathbf{X}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial T^c}{\partial X_1^c} & \frac{\partial T^c}{\partial X_2^c} & \cdots & \frac{\partial T^c}{\partial X_M^c} \end{bmatrix}, \nabla_{\mathbf{V}} T^c(\mathbf{X}^c, \mathbf{V}^c) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial T^c}{\partial V_1^c} & \frac{\partial T^c}{\partial V_2^c} & \cdots & \frac{\partial T^c}{\partial V_N^c} \end{bmatrix}$ であり、$\nabla_{\mathbf{XX}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c), \nabla_{\mathbf{XV}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ などは T^c のヘッセ行列である。上付きの T は転置を表わす。

証明. 補論を参照せよ。■

(26) 式と (27) 式は、要素賦存間の代替可能性 $\nabla_{\mathbf{VV}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ および要素賦存と最終財の間の代替可能性 $\nabla_{\mathbf{XV}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ は、最終財の代替可能性 $\nabla_{\mathbf{XX}} T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)$ と

$\psi_i(\mathbf{p})$ によって決定されることを示している。このことは最終財の代替可能性には何の制約もかかっていないことを意味している。ゆえに、財価格 $\mathbf{p}$ が変化すれば、均衡生産ベクトルが各国において異なり得るのである。しかし、$\psi_i(\mathbf{p})$ が全ての国で同一でなければならないことから、要素賦存の変化に対する生産ベクトルの反応は各国で同じでなければならないのである。

さらに、このモデルは Π と $\Gamma^c(\mathbf{p})$ が全次元的で無い場合にも拡張可能である。つまり、本源的要素が N 個あるが N 次の要素空間を張れない場合である。$K \leqq N, \mathbf{p} \in \Pi$ に対して $\Gamma^c_K(\mathbf{p})$ とする。$\Gamma^c_K(\mathbf{p})$ は凸集合であると仮定する。以下の概念を導入しよう。

定義 2.5.4：K 個のベクトル $\delta_i(\mathbf{p})$ が $\Gamma^c_K(\mathbf{p})$ を含む K 次のアフィン部分空間を張るとき、それらのベクトルは $\mathbf{V}^c \in \Gamma^c_K(\mathbf{p})$ において $\Gamma^c_K(\mathbf{p})$ を局所的に張るという。

この概念を導入すれば、定理 5 と 6 と同様に、要素価格は K 次の部分空間において均等化する。

Blackorby et al. (1993) における生産技術は規模に関して収穫逓減、結合生産、及び本源的要素以外の財の投入（中間財の存在）を許容する点で Kuga (1972) や Mas-Collel (1979a, b) と比べより一般性を有している。要素価格の均等化を導く条件の中で、このモデルにおいてとりわけ重要なのは各国の変形関数が「線形方向」という性質を持つということである。Kuga (1972) も財の数と本源的要素の数が一致しないケースでも適応可能であることおよび要素価格均等化を要素価格が財価格にのみ依存し要素賦存から独立することと定義している点で、Blackorby et al.（1993）と多くの類似性を有している。しかし、第 1 に Kuga (1972) における要素価格均等化の定義と Blackorby et al. (1993) におけるそれとは若干異なり、前者の方が後者より強い。第 2 に、要素価格均等化に際してはたらくメカニズムは 2 つのモデルにおいて大きく異なっている。Kuga (1972) において要素価格が均等化するのは、要素賦存の変化に対する各国変形関数の、対応する勾配ベクトルの不変性という意味での、反応の類似性ではなく、定理 3 が示しているように要素賦存量の変化に対して産出量が反応しない場合の要素価格の変化を表わす「直接効果」と世界市場価格と国内生産価格との乖離に対応した産出量の調整を通じた要素価格の変化を表わす「調整効果」がちょうど相殺されるからである。しかしながら、Blackorby et al. (1993) で考察する生産経済のクラスは Kuga (1972) のそれよりも広範であること、及び前者における要素価格均等化の定義が後者のそれより弱いことより、前者の必要十分条件は後者のそれよりは弱い。特に、中間財の存在するような生産経済の下でも要素価格均等化が成立する条件を明らかにしている点が Blackorby et al. (1993) の斬新な貢献であろう。

しかしながら、この必要十分条件を満たすような生産経済クラスがどの程度広いのかは

必ずしも自明ではない。少なくとも、定理５の必要十分条件を用いて要素価格均等化が成立し得る生産経済であるか否かのテストを行うことができよう。

3　資本が生産可能財である場合の HOS モデル

これまでの議論では全ての投入要素が本源的要素であった。換言すれば、全ての投入要素が労働と同じように生産過程から産出されるものではなかった。しかし、古典派やマルクスが重要視したように、産業社会の確立に基づく 19 世紀以降の資本主義経済システムにおいては、資本とは貨幣的価値形態と再生産される複数の財との循環という本質的特徴を有する。

複数の再生産可能な資本財の導入が、伝統的な経済理論に様々な問題を引き起こすことは、いわゆるケンブリッジ資本論争において明らかにされた。ケンブリッジ資本論争とは、1960 年代から 70 年代にかけて行われた資本概念の定式化、また新古典派生産関数および限界生産力説の論理的妥当性などをめぐる、アメリカのケンブリッジを中心とする新古典派経済学者（サミュエルソン、ソロー、モジリアーニ、バーマイスター、ミード、ハーンなど）とイギリスのケンブリッジを中心とするネオ・リカードゥ派の経済学者（J. ロビンソン、パシネッティ、ガレニャーニ、カルドア、スラッファなど）との間の論争である。

この論争が HOS モデルにとって厄介な問題となるのは、資本が複数の再生産可能財から成る場合、1 つの技術が複数の利潤率に対応する「**技術の再転換**（*reswitching of techniques*)」が起こる可能性が生じたり、資本価値の決定が賃金率と利潤率の分配関係から独立ではなくなる為に、より高い利潤率にも関わらずより高い資本集約度が対応する「**資本逆行**（*capital reversing*)」が起こる可能性が生ずることである。つまり、新古典派生産関数から得られる費用関数の性質が失われる可能性がある。

Sraffa (1960) が示したように、資本が複数の再生産可能財から成る場合、資本財の価格は財市場の価格構造および賃金率と利潤率の分配関係と同時に決定されなければならず、資本価値の賦存量を賃金率と利潤率の分配関係から独立して $\mathbf{V}$ のように与えることはできない。さらに、技術選択が許容される場合、１つの生産技術が複数の利潤率の下で費用最小化技術として選択される可能性がある。このことは要素価格である利潤率と財の価格体系との大域的単葉性が失われる可能性を示唆し、したがって資本が複数の再生産可能財から成る場合、前節で眺望した条件によって要素価格均等化が確立するか否かは、自明ではない。

以下では、最初にケンブリッジ資本論争を簡単にレビューする。第 2 に、2 財のみ存在する経済においては、資本が複数の再生産可能財から成る場合であっても、要素集約度の

部門間逆転が無い事が要素価格均等の必要十分である故に、サミュエルソンの定式化した意味での要素価格均等化定理は成立する事を確認する。同時に、この場合、要素集約度の部門間逆転は普遍的に起こり得る現象となる為、むしろ一般的には利潤率と財の価格体系との大域的単葉性は成立しない事を確認する。第 3 に、われわれは、要素集約度の部門間逆転が起こらない状況であっても、利潤率と財の相対価格との大域的単葉性が成立しない 4 財モデルの数値例の作成に成功したことを示す。

3.1 ケンブリッジ資本論争

ケンブリッジ資本論争は新古典派経済理論に対する深刻な批判であったにもかかわらず、現在ではそれを知る者は決して多くないのでここで簡単に資本論争についてふれておきたい[*22]。

本稿の目的からすれば、問題となる論点は「資本逆行」と呼ばれる現象である。新古典派生産関数を前提にすれば、賃金率-利潤率曲線（もしくは要素価格フロンティア）は原点に向かって凸になり、利潤率（ないしは利子率）と生産技術は一対一に対応し、資本集約度は利潤率の単調減少関数になる。つまり、限界生産力説が成立する。

Samuelson (1962) は上記のような新古典派生産関数の特質を、複数の再生産可能な資本財の様々な構成比によって定まる、複数の異質な資本が存在する場合にも拡張しようと試みた。サミュエルソンは異質な資本 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ が存在し、それぞれの資本が一定量の労働力と結びつき、一種類の消費財とその資本が生産される単純な 2 部門モデルを想定した。資本は異質なので資本 α と労働を用いて他の資本を生産することはできない。そして、資本 α を再生産するために必要な資本と労働の比率は技術的に所与であり、そしてその比率は資本 α を用いて消費財を生産するときの資本-労働比率と同一であると仮定する。資本 β を再生産するための資本-労働比率は資本 α を使用した場合と異なるが、資本 β を使用した消費財の生産に必要な資本-労働比率は資本 β を生産する際の資本-労働比率と同一である。つまり、採用される資本ごとに資本-労働比率は両方の部門のおいて同一である。この場合、それぞれの資本に関する賃金率-利潤率曲線は直線になる。図 1 において、α で示される直線は資本 α を採用している場合であり、β, γ も同様である。こうした異質な資本が無限に存在するとすれば、経済全体の賃金率-利潤率曲線を個々の直線の賃金率-利潤率曲線の包絡線として得ることができる。そして、その包絡線は必ず原点に対して凸になる。

[*22] ケンブリッジ資本論争の論点は多岐にわたっている。詳細については Cohen and Harcourt (2003)、Harcourt (1972)、Pasinetti (2000) などを参照せよ。

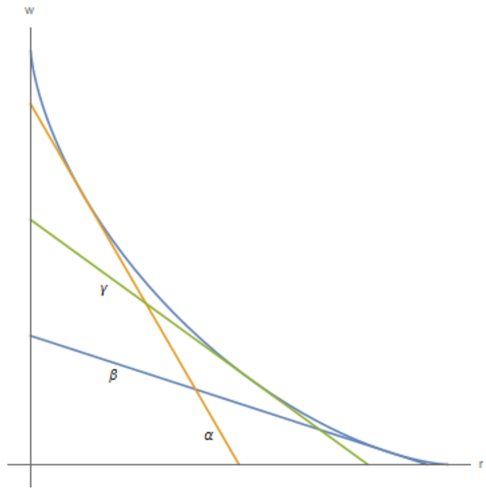

図 1　代理生産関数

サミュエルソンは、図 1 に示されている異質な資本から得られた包絡線としての賃金率-利潤率曲線が、ゼリーのような同質な資本から得られる個々の賃金率-利潤率曲線に十分に近似する、と結論付けた。そして、この近似された生産関数を「代理生産関数（surrogate production function)」、その投入要素を「代理資本（surrogate capital)」と名付けた。サミュエルソンの考えが正しければ、図 1 とは、代理生産関数を用いれば資本の異質性に煩わされることなく資本の限界生産性を定義することができ、新古典派生産関数が適応可能性であることを、示していることになる。代理生産関数は利潤率と生産技術の 1 対 1 対応を保証するからである。Samuelson（1962）の代理生産関数は、Levhari (1965) による、経済体系全体としては 1 つの技術が複数の利潤率に対応することはあり得ないという「非転換定理（non-switching theorem)」によって、さらなる正当性を確保できたかに思われた。

しかし、この議論は、資本財生産と消費財生産の両部門において資本-労働比率が同じである、という仮定に決定的に依存している。そして、そのような仮定が極めて特殊であることは言を俟たない。この仮定をはずしてしまえば、サミュエルソンの推論は瞬く間に崩壊する[*23]。さらに、Pasinetti (1966) が Levhari (1965) の非転換定理に対する反例を見つけ出したことによって、代理生産関数は極めて特殊な仮定の下でしか構築し得ないこ

[*23] 奇妙なことに、サミュエルソン自身がこのことを既に認識していた節がある。なぜなら、消費財部門と資本財部門の投入要素比率が等しいという極端な仮定を緩めても、代理生産関数に関わる命題の多くが依然として成立するという推論が誤りであることを、ガレニャーニによって指摘されたことに対し、サミュエルソンが謝意を述べているからである。Samuelson（1962, p. 202）をみよ。Garegnani (1970) は代理生産関数に対する批判である。

とが、明らかになった。

両部門において資本-労働比率が同じという仮定を外せば、より高い利潤率の下で資本集約度のより高い技術が採用される可能性がある。これを **資本逆行** という。つまり、資本が再生産可能財である場合、限界生産力説に反して、資本集約度は利潤率の単調減少関数にならない可能性がある[*24]。また、1966 年の Quarterly Journal of Economics (QJE) のシンポジウム「Paradoxes in Capital Theory：A Symposium」に発表された全ての論文、Pasinetti (1966)、Bruno et al. (1966)、Garegnani (1966)、Levhari and Samuelson (1966)、Morishima (1966)、Samuelson (1966b) が、複数の利潤率の水準に対して 1 つの生産技術が対応する可能性を指摘した。つまり、r を利潤率、α と β を経済体系に存在する代替的な技術とすれば、$0 \leqq r \leqq r_1$ の下では技術 α の下で費用最小化が達成され、$r_1 \leqq r \leqq r_2$ の下では技術 β の下で費用最小化が達成されるが、$r_2 \leqq r \leqq R_\alpha$ の下では再び技術 α の下で費用最小化が達成され得るのである（R_α は技術 α で達成可能な最大利潤率である)。これが **技術の再転換** である。この現象も限界生産力説に反している。しかも、技術の再転換は技術が分解可能か不能かに関わりなく生じ得ることが明らかにされた[*25]。

このように、ケンブリッジ資本論争の結果は、資本が複数の再生産可能な財から成るというより現実的な仮定の下では、新古典派生産関数から導出される費用関数に基づいた HOS モデルの分析を疑問視する十分な根拠を提示しているのである。

[*24] 詳細は、Pasinetti (1977) の第 6 章を参照されたい。付言すれば、ネオ・リカードゥ派からの批判に対する新古典派経済学者からの反応は、大きく 3 つに大別することができる。第 1 は、技術の再転換を paradox、perverse、exceptional、inconvenient や anomalous などと表現し、現実にはほとんど観察されない重要度の低いものと看做すことである（Samuelson, 1966b など)。Blaug (1975) もこの立場である。第 2 は、技術の再転換などの厄介な現象が発生しないための条件を探し求めることである（Burmeister, 1980 など)。第 3 は、ネオ・リカーディアンモデルはゼリーとしての資本に依存しない異時点間一般均衡理論の 1 特殊モデルであるに過ぎず、ネオ・リカーディアン理論はその定常均衡を分析したに過ぎない。他方、異時点間一般均衡理論には資本逆行や技術の再転換よりも重要な問題が存在する、という議論である（Hahn, 1982 など)。詳しくは Pasinetti (2000) を参照せよ。

[*25] 付言すれば、Burmeister (1980, pp. 114–115) によると、技術の再転換は経済学的に重要な現象ではないという。なぜなら、技術の再転換は逆説的な消費行動の必要条件ではないからである。新古典派生産関数を前提とすれば定常状態での 1 人当たり消費は利潤率（ないしは利子率）の単調減少関数になる。この単調な関係は 1 財モデルから得られる新古典派的寓話であり、それと矛盾しない限り新古典派経済理論の本質は傷つかないとバーマイスターは考えている。Burmeister (1980, p. 117) は、異質な資本財と 1 種類の消費財が存在するという仮定の下で技術の再転換を伴わない資本逆行の例を図で示している。

3.2 複数の再生産可能な資本財を含む経済モデル：$n = 2$ の場合

資本論争の成果をもとにした HOS モデル批判は、1970 年代にメトカーフとスティードマンによって集中的に行われた。Metcalfe and Steedman (1972, 1973) をはじめ、ほぼ全てが Steedman (1979) に収められている。Mainwaring (1984) もネオ・リカーディアンの立場から HOS モデル批判を行っている。彼らは様々な具体例を挙げて、新古典派 HOS モデル批判を行っている。しかしながら、彼らの批判的議論は、彼らの前提するレオンチェフ経済体系内で具体的に数値例を提示して、その数値例の下では利潤率と財の価格との大域的単葉性を導出し得ない事を厳密に示すものにはなっていない。実際、以下では、$n = 2$ の場合、彼らの前提するレオンチェフ経済モデルの下でも要素価格均等化定理は成立する事を示す。但し、この場合、要素価格均等化が成立する必要十分条件とは、想定する経済環境を極めて限定的にするという意味で、この定理の含意は、むしろ不可能性命題であると解釈し得る事を明らかにする。

このモデルの基本的前提は本源的投入要素は労働のみであり、物的な投入要素は全て生産可能財ということである。1 つの生産技術はいずれもレオンチェフ体系によって表わされ、財 j $(j = 1, \cdots, n)$ の均衡価格は物的投入要素が n 個あるとすれば、一般に以下のように表される。

$$p_j = l_j w + (1 + r) \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i,$$

但し、$l_j > 0, a_{ij} \geqq 0, w \geqq 0, r \geqq 0$ はそれぞれ労働投入係数、物的投入係数、賃金率、利潤率を示している。単純化のため、ここでは全ての資本が流動資本であると仮定している。財 j を産出するレオンチェフ生産技術 $(a_{1j}, \ldots, a_{nj}, l_j)$ は一般に複数、存在し得る。いずれの技術が選択されるかは、所与の価格体系の下での費用最小化原理によって決定される。今、価格体系が $(\mathbf{p}, w, r)$ の下で選択される費用最小化生産技術を

$$\left((a_{ij} (\mathbf{p}, w, r))_{i=1,\ldots,n}, l_j (\mathbf{p}, w, r) \right) \ (\forall j = 1, \cdots, n).$$

と表す事にしよう。

このとき、以下の定理が成立する。

定理 7：上記のレオンチェフ体系で $n = 2$ の場合、財の価格体系と利潤率との大域的単葉性が成り立つのは、2 つの部門間での資本集約度の大小関係の逆転が生じないとき、その

ときのみである。

証明. 補論を参照せよ。 ■

賃金率-利潤率曲線と相対価格には、以下で示される関係が成立している。

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}=-\frac{l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)\left\{1-\left(1+r\right)a_{22}\left(\mathbf{p},w,r\right)+\left(1+r\right)l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)\right\}}{2a_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)}\frac{\mathrm{d}^2w^1}{\mathrm{d}r^2}$$

したがって、

$$sign\left(\frac{\mathrm{d}^2w^1}{\mathrm{d}r^2}\right)=-sign\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\right).$$

つまり、Mainwaring (1984) が明らかにしているように、2 部門レオンチェフモデルに関する限り、相対的な資本集約度によって $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$ の符号が決まり、それが賃金率-利潤率曲線の形状を決定する。レオンチェフ 2 部門モデルにおいてニュメレール財生産部門が相対的に資本集約的（労働集約的）であれば相対価格は利潤率に関する単調減少（増加）関数になり賃金率-利潤率曲線は原点にむかって凸（凹）関数になる。

凸生産集合を前提にすれば、$\frac{l_1(\mathbf{p},w,r)a_{12}(\mathbf{p},w,r)+l_2(\mathbf{p},w,r)a_{22}(\mathbf{p},w,r)}{l_2(\mathbf{p},w,r)}$ と $\frac{l_1(\mathbf{p},w,r)a_{11}(\mathbf{p},w,r)+l_2(\mathbf{p},w,r)a_{21}(\mathbf{p},w,r)}{l_1(\mathbf{p},w,r)}$ との大小関係を逆転させてしまう技術変化は、決して特異なものではない。ゆえに、要素集約度の無逆転性は、複数の再生産可能な資本財が導入されたモデルでは、非常に限られた場合のみにしか維持されない[*26]。

3.3 ネオ・リカーディアンの HOS モデル批判

前節の例は、既述のように資本が複数の再生産可能財から成るという設定の下では、要素集約度の逆転が容易に起こり得ることを示している。では、要素集約度の逆転が起こらない状況の下で要素価格均等化が必ずしも成立しないことを示せるであろうか？

そのような考察をする為に、2 つの垂直的に統合された部門が存在すると経済を想定しよう[*27]。第 1 部門も第 2 部門も消費財生産産業と資本財生産産業を持つ。第 1 部門の消費財生産産業を第 1 産業、第 1 部門の資本財生産産業を第 2 産業、第 2 部門の消費財生

[*26] 部門間資本集約度の逆転と大域的単葉性に関する数値例が補論 7.7 節に示されている。

[*27] 高増（1991）は数値例を用いて HOS モデル批判を試みた。しかし残念ながら、同氏の論証には誤りが含まれており、実際には部門間資本集約度の逆転現象が発生し HOS モデル批判に成功していない。以下で示すわれわれの数値例は同氏の数値例を改訂することによって得られたものである。

産産業を第 3 産業、第 2 部門の資本再生産産業を第 4 産業とする。第 1 産業に以下のような 3 つの技術が存在すると仮定する。

$$\left(a_{11}^{\alpha}, a_{21}^{\alpha}, l_1^{\alpha}\right) = (0.38, 0.63, 0.06),$$
$$\left(a_{11}^{\beta}, a_{21}^{\beta}, l_1^{\beta}\right) = (0.4188, 0.424, 0.265),$$
$$\left(a_{11}^{\gamma}, a_{21}^{\gamma}, l_1^{\gamma}\right) = (0.52, 0.01, 0.65).$$

a_{ij}^{ι} は技術 ι の下で財 j を 1 単位生産するために必要な財 i の量、l_j^{ι} は技術 ι の下で財 j を 1 単位生産するために必要な労働量である（$\iota = \alpha, \beta, \gamma$）。他方で、第 2 産業で利用可能な技術は 1 つしかないとする。

$$(a_{12}, a_{22}, l_2) = (0.08, 0, 1).$$

3 つある技術の中で費用を最小させる技術が選択されるので、第 1 財をニュメレールとして各々の技術に関する賃金率-利潤率曲線を描き、その包絡線によって選択される技術が決定される。図 2 の縦軸は第 1 財で測られた賃金率を示しており、w_1 で表わす。

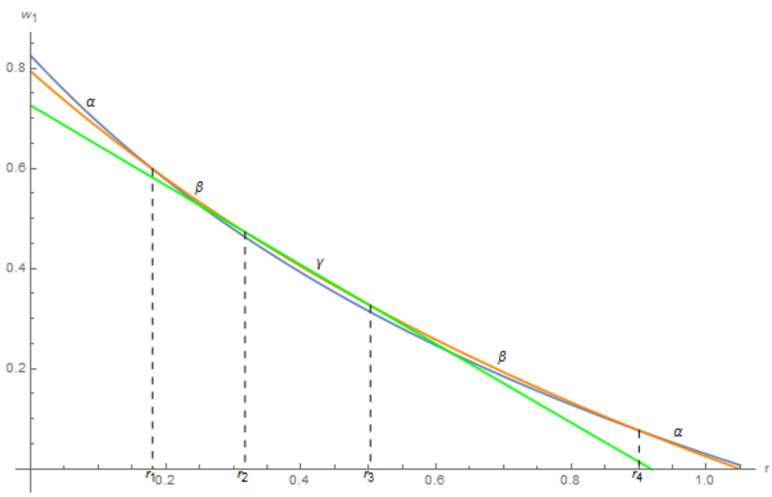

図 2　第 1 部門の賃金率-利潤率曲線

図 2 に示されているように、4 つの転換点が存在する。$0 \leqq r \leqq r_1 \cong 0.18$ のとき技術 α が選択され、$r_1 \leqq r \leqq r_2 \cong 0.317$ のとき技術 β が選択され、$r_2 \leqq r \leqq r_3 \cong 0.503$ のとき技術 γ が選択され、$r_3 \leqq r \leqq r_4 \cong 0.9003$ のとき技術 β が選択され、$r_4 \leqq r \leqq R_{\alpha} \cong 1.066$ のとき技術 α が選択される。R_{α} は第 1 部門で実現可能な最大利潤率である。第 1 財をニュメレールとした技術 ι の賃金率-利潤率曲線を $w_1^{\iota}(r)$ で表わす。利潤率 r の下での第 1 財で測った 1 人当たりの資本量を $k_1(r)$ で表わせば、

$$
k_1(r) = \begin{cases} \left| \frac{\mathrm{d}w_1^{\alpha}(r)}{\mathrm{d}r} |_{r=0} \right|, \text{ if } r = 0 \\ \frac{w_1^{\alpha}(0)-w_1^{\alpha}(r)}{r}, \text{ if } 0 < r \leqq r_1 \text{ and } r_4 \leqq r \leqq R_{\alpha}, \\ \frac{w_1^{\beta}(0)-w_1^{\beta}(r)}{r}, \text{ if } r_1 \leqq r \leqq r_2 \text{ and } r_3 \leqq r \leqq r_4, \\ \frac{w_1^{\gamma}(0)-w_1^{\gamma}(r)}{r}, \text{ if } r_2 \leqq r \leqq r_3. \end{cases} \tag{29}
$$

となり[*28]、技術の再転換が起こっている。さらに、$r = r_3$ における γ から β への転換および $r = r_4$ における β から α への転換では、利潤率と資本集約度の間の単調減少の関係が成立していない。つまり、資本逆行が起こっている。

第 2 部門では第 3 産業が次のような代替的な技術 δ、ϵ が存在すると仮定する。

$$
\left(a_{33}^{\delta}, a_{43}^{\delta}, L_3^{\delta}\right) = (0.2, 0.485, 0.03),
$$
$$
\left(a_{33}^{\epsilon}, a_{43}^{\epsilon}, L_3^{\epsilon}\right) = (0.3, 0.41, 0.02).
$$

他方、第 4 産業では利用可能な技術は 1 つしかないとする。

$$
(a_{34}, a_{44}, L_4) = (0.29, 0, 1.61).
$$

第 2 部門の消費財価格をニュメレールとして、それによって測られた賃金率を w_2 で表わし、第 1 部門と同様に賃金率-利潤率曲線を描けば、図 3 のようになる。

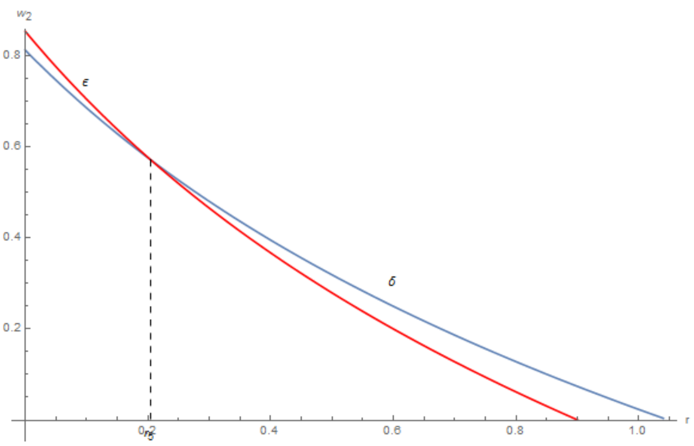

図 3　第 2 部門の賃金率-利潤率曲線

第 2 部門では $r = r_5 \cong 0.205$ で技術の転換は起きるが再転換も資本逆行も起きていない。$0 \leqq r \leqq r_5$ のとき ϵ が選択され、$r_5 \leqq r \leqq R_{\delta} \cong 1.049$ のとき δ が選択される。R_{δ}

[*28] Garegnani (1970) を参照せよ。

は第 2 部門で実現可能な最大利潤率である。さらに、（29）式と同様に第 2 部門の消費財をニュメレールとした 1 人当たり資本量を求めることができる。それを $\overline{k}_2(r)$ とする。第 1 部門と比較するにはニュメールを一致させる必要がある。第 1 部門の消費財の相対価格を p_1、第 2 部門のそれを p_2、p_1 で評価した第 2 部門の 1 人当たり資本量を $k_2(r)$ とすれば、$k_2(r) = \overline{k}_2(r) \times \frac{p_2}{p_1}$ となる。両部門において賃金率は一様なので $\frac{p_2}{p_1} = \frac{w_1}{w_2}$ となり、$k_2(r) = \overline{k}_2(r) \times \frac{w_1}{w_2}$ を得る。

以上の結果をまとめると表 1 のようになる。

r	w_1	w_2	$\frac{p_2}{p_1}$	k_1	k_2
0	0.826	0.854	0.966	1.451	1.565
0.1	0.692	0.705	0.981	1.336	1.36
0.2	0.58	0.577	1.004	1.073	1.392
0.3	0.488	0.481	1.015	1.021	1.125
0.4	0.407	0.396	1.0295	0.797	1.075
0.5	0.328	0.319	1.0277	0.796	1.015
0.6	0.258	0.250	1.030	0.894	0.967
0.7	0.193	0.187	1.0320	0.859	0.924
0.8	0.133	0.128	1.0322	0.827	0.884
0.9	0.076	0.074	1.031	0.798	0.846
1.0	0.029	0.023	1.238	0.796	0.978
1.04	0.011	0.004	2.723	0.783	2.118

表 1:実質賃金率、相対価格と資本集約度

表 1 に示されているように、利潤率の水準に関わりなく第 2 部門が常に資本集約度が高く、部門間の資本集約度の逆転は起こっていない。しかしながら、相対価格 p_2/p_1 は利潤率の単調関数にはならず、先述したように資本集約度ももはや利潤率の単調減少関数ではない。表 1 の資本集約度と相対価格を図示したのが図 4 および図 5 である。

つまり、資本が再生産可能財である場合、要素価格均等化定理は必ずしも成立しないのである。この結果は、資本を本源的要素としてしか扱ってこなかった新古典派経済学にとって看過できない問題のはずである。

ところで、上記の数値例は 4 財モデルであるが、そのうち 2 財はいわば中間財的役割であって世界市場で取引されるのは 2 種類の消費財である。利潤率と相対価格の大域的単葉

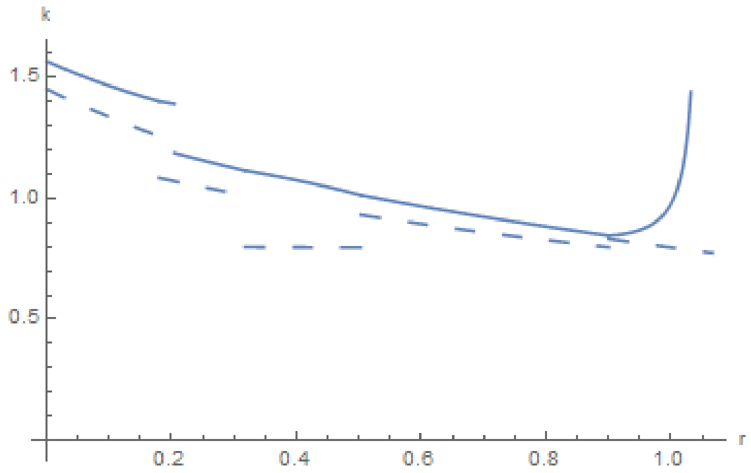

図４　資本集約度の推移（点線が第１部門、実線が第２部門を示しており、ともに第１部門の消費財で測られている）

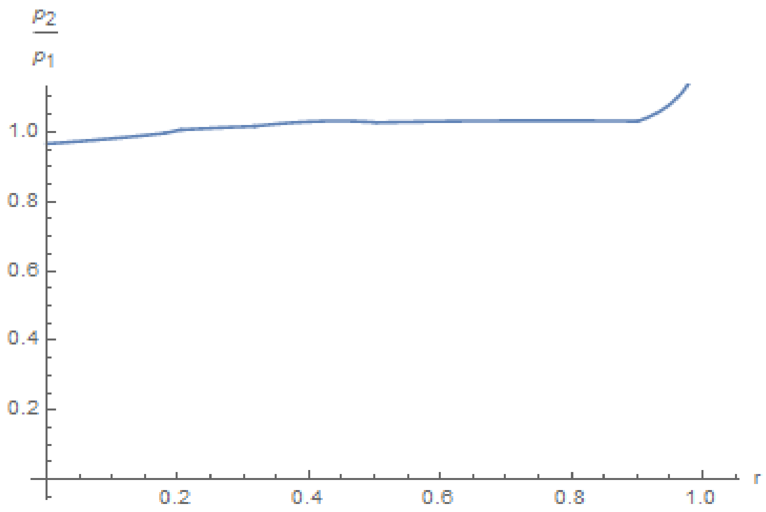

図５　相対価格の推移

性もこの２つの消費財の相対価格と利潤率との間で論じられており、その意味で本質的に２財・２要素（ただし資本は本源的ではなく再生産可能な生産要素）の経済を扱っている。新古典派の枠組みとのアナロジーで考えれば、資本集約度の無逆転が要素価格均等化定理の反例を提示する際の前提条件であると考えるのは理に適っている。

4　資本論争後の新古典派経済学

HOS モデルに複数の再生産可能な財としての資本を導入することに対して、サミュエルソンは当初以下のように述べていた。

> Now suppose there are uniform differences in factor intensity, so that for some two goods that are simultaneously produced in both countries, say goods 1 and 2, $p_1(r)/p_2(r) = p_{12}(r)$ is a monotone, strictly increasing (or decreasing) function of r (the interest rate; added by the author). *Then, the interest rate will be equalized by positive trade in those goods alone* (Samuelson, 1965, p. 49).

このサミュエルソンの言葉は Bliss (1967) によっても批判されているが、問題はまさに相対価格が単調関数になるための条件であって、サミュエルソンはそれについて何も述べていない[*29]。

その後、Bliss (1967) や Metcalfe and Steedman (1973) などの批判を受けて、Samuelson (1975) は異質で再生産可能な資本財が存在する場合、要素価格均等化定理が大域的ではなく局地的にしか成立しない可能性を指摘した（local factor equalisation theorem)。しかしながら、サミュエルソンは Metcalfe and Steedman (1972, 1973) が発する HOS モデルに対する警告はアカデミックではないとその重要性を認めていない（Samuelson, 1975, p. 351)。その理由は、ケンブリッジ資本論争の際の反応と同じく、現実にそのようなことが起こる蓋然性が高くないという実証的な見地からの判断によるものと思われる。

ネオ・リカーディアンによる批判を受けて、異質な資本財を導入した最も厳密なモデルを構築したのは Burmeister (1978) であろう。以下では、彼のモデルを検討しよう。

4.1　Burmeister (1978)

サミュエルソンも率直に認めているように、異質な資本財が生産可能である場合、要素価格均等化定理は一般には成立しない。したがって、それを成立させるためにはより強い条件を課さなければならない。ストルパー・サミュエルソン定理の一般化を試みた Chipman (1969) や Inada (1971) らの P 行列を利用して、資本財が生産可能な場合でも、要素価格均等化定理が成立する条件を求めたのが Burmeister (1978) である。Inada

[*29] この点に関して、Samuelson (1978) も参照されたい。

(1971) は 2.2 節で定義した SSS 基準を以下のように整理した。

SSS-I 条件：$\mathbf{A}^{-1}$ の全ての対角要素が正でありかつ全ての非対角要素が負である。

SSS-II 条件：$\mathbf{A}^{-1}$ の全ての対角要素が負でありかつ全ての非対角要素が正である。

但し、Chipman (1969) の ***SSS* 基準** では行列 $\widetilde{\mathbf{A}}^{-1} = \left[\alpha^{ij}\right]$ に関しての条件であるのに対して、ここでの行列 $\mathbf{A}$ に関しては、正方行列である事以外には、何も条件を課していない。

Bermeister (1978) では、m 個の消費財、n 個の生産可能な資本財、h 個の本源的要素の存在が仮定されている。ただし、$h \leqq m$ と非貿易財の存在が仮定されている。

第 1 に、技術選択の可能性のない経済環境から考察を始めよう。利潤率を r、資本財価格を $\mathbf{p} \equiv [p_i]$ $(i = 1, 2, \cdots n)$、消費財価格を $\mathbf{s} \equiv [s_i]$ $(i = n+1, n+2, \cdots, n+m)$、本源的要素の価格を $\mathbf{w} \equiv [w_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, h)$ で表わす。資本財の投入係数行列を $\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+m} \end{bmatrix}$、本源的要素の投入行列を $\mathbf{e} \equiv \begin{bmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1n} & e_{1,n+1} & \cdots & e_{1,n+m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{h1} & \cdots & e_{hn} & e_{h,n+1} & \cdots & e_{h,n+m} \end{bmatrix}$ とする。

したがって、価格方程式は以下のように与えられる。

$$[\mathbf{p}, \mathbf{s}] = \mathbf{we} + (1 + r)\,\mathbf{pA}. \tag{30}$$

$[\mathbf{p}, \mathbf{s}] = [p_1, \cdots, p_n, s_{n+1}, \cdots, s_{n+m}]$ であり、全ての財価格ベクトルである。m 個の全ての消費財と n 個のうち少なくともいずれか 1 つの資本財の自由貿易が行われていると仮定する。さらに第 1 消費財がニュメレールであるとする（$s_{n+1} = 1$)。

上記の仮定の下では、Sraffa (1960) の言葉を用いれば消費財は「非基礎財」であり、その生産条件は消費財のみに影響を及ぼすだけであり、利潤率やその他の財の価格には影響を及ぼさない[*30]。したがって、一般性を失うことなく、$m = h$ と仮定してよい。そうすると、$\mathbf{A}$ と $\mathbf{e}$ を以下のように正方行列にまとめることができる。

[*30] 基礎財と非基礎財の区別は技術と所得分配の分析にとって重要である。Sraffa (1960) は単一生産体系に関する分析において全ての財の生産に直接または間接的に必要とされる財を基礎財と呼び、それ自身の生産には必要とされるかもしれないが基礎財の生産には必要とされない財を非基礎財と呼んだ。

$$\overline{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+h} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+h} \\ e_{11} & \cdots & e_{1n} & e_{1,n+1} & \cdots & e_{1,n+h} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{h1} & \cdots & e_{hn} & e_{h,n+1} & \cdots & e_{h,n+h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_1 & \overline{\mathbf{A}}_2 \\ \overline{\mathbf{A}}_3 & \overline{\mathbf{A}}_4 \end{bmatrix}.$$

$\overline{\mathbf{A}}^{-1}$ が存在すると仮定し、以下のように定義する。

$$\mathbf{B} \equiv \overline{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ はそれぞれ n 次の正方行列、$n \times h$ 行列、$h \times n$ 行列、h 次の正方行列である。

第 1 消費財の価格をニュメレールにしたので消費財価格ベクトル $\bar{\mathbf{s}} \equiv \left[1, \frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}, \cdots, \frac{s_{n+h}}{s_{n+1}}\right]$ として（30）式は以下のように書き換えられる。

$$[\mathbf{p}, \bar{\mathbf{s}}] = [(1+r)\,\mathbf{p}, \mathbf{w}]\,\overline{\mathbf{A}}, \text{ または} \tag{31}$$

$$[\mathbf{p}, \bar{\mathbf{s}}]\,\overline{\mathbf{A}}^{-1} = [\mathbf{p}, \bar{\mathbf{s}}]\,\mathbf{B} = [(1+r)\,\mathbf{p}, \mathbf{w}] \tag{32}$$

となる。消費財価格は自由貿易によって決定されると見做し、ここでは所与のベクトルである。更に、$\overline{\mathbf{A}}^{-1}$ が存在するとの仮定によって、$\bar{\mathbf{s}}\mathbf{B}_3 = \mathbf{w}$ が成立するので、本源的要素の価格均等化はすでに保証されている状況を考察している。

（32）式の最初の n 本の方程式を変形すれば、以下のようになる。

$$\mathbf{p}\,[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}] = -\bar{\mathbf{s}}\mathbf{B}_3. \tag{33}$$

$\mathbf{I}$ は n 次の単位行列である。ここで (33) 式より、自由貿易によって決定された任意の消費財価格ベクトルに対応して、資本財価格ベクトルの決定が利潤率を一意に決定する関係が導ければ、資本に関する価格均等化も成立することを確認できる。実際、以下の定理を得る。

定理 8：n 個の資本財および h $(\leqq m)$ 個の消費財の生産が SSS-II 条件（SSS-I 条件）を満たすとすれば $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r} < (>)\, 0$ である。

証明. 補論を参照せよ。 ■

定理 8 が示していることは、拡大的投入行列 $\overline{\mathbf{A}}$ に関して、SSS-I 条件もしくは SSS-II 条件が成立している場合、資本財価格は利潤率の単調関数になるということである。このような条件下では、本源的要素のみならず、資本に関しても要素価格均等化が成立している。

これまでは技術選択の可能性が存在しなかったが、以下では新古典派生産関数（4）にしたがって技術選択が行われると想定しよう。要素価格 q_i と資本財価格の間には均衡では $p_i = \frac{q_i}{1+r}$ という関係があることを考慮して、（31）式を r で微分すれば、

$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{s}}}{\mathrm{d}r}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}r}\right] \overline{\mathbf{A}} + [\mathbf{q}, \mathbf{w}] \frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{A}}}{\mathrm{d}r}$$

となる。ただし $\mathbf{q} \equiv [q_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ である。新古典派生産関数が仮定されているので

$$[\mathbf{q}, \mathbf{w}] \frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{A}}}{\mathrm{d}r} = \mathbf{0}$$

である。したがって、

$$\left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{s}}}{\mathrm{d}r}\right] \mathbf{B} = \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}r}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}r}\right] \tag{34}$$

が成立する。この行列 $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{A}}^{-1}$ の存在は、あらゆる可能な技術選択の下でも、常に保証されている、と仮定されている。すなわち、価格体系の変化に対応して技術選択が変わる事で、行列 $\overline{\mathbf{A}}$ の構成は変化し得るが、しかしそれは常に $\overline{\mathbf{A}}^{-1}$ の存在を許すような変化に限定されている、そのような状況を想定しているのである。

再び、自由貿易によって決定された任意の消費財価格ベクトルに対応して、資本財価格ベクトルの決定が利潤率を一意に決定する関係が導けるか否かを確認する。確認できる場合は、資本財が再生産可能である場合で技術選択の余地のある経済環境であっても、資本に関する価格均等化も成立することを確認できる。

定理 9：全ての国が新古典派生産関数（4）にしたがって n 個の資本財と h $(\leqq m)$ 個の消費財を生産し、全ての実現可能な要素価格において SSS-II 条件（SSS-I 条件）が満たされているとすれば $\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r} < (>) \, \mathbf{0}$ である。

証明. 補論を参照せよ。 ■

定理 9 が示していることは、資本財が新古典派生産関数によって生産され、SSS-I 条件もしくは SSS-II 条件が満たされるならば、任意の消費財価格の下で、対応する資本財価格が利潤率の単調関数となるということである。これは資本使用価格が資本財価格に対して 1 対 1 に対応して決まる構造を意味し、従って均衡価格体系下での資本使用価格の国際間

均等化を意味する。他方、本源的生産要素に関しては、$\mathbf{B}_3$ が常に存在するという暗黙的仮定より、その価格は消費財価格ベクトルに対して 1 対 1 に対応して決まる構造が維持されている。よって、要素価格均等化が成立している。

ところで、SSS-I 条件と SSS-II 条件の経済学的意味は一瞥した限りでは明確ではない。SSS-I 条件を満たすことは $\mathbf{A}^{-1}$ がミンコフスキー行列であること、SSS-II 条件を満たすことは $\mathbf{A}^{-1}$ がメツラー行列であることを意味する。Uekawa et al. (1972) が示しているように、SSS-I 条件と SSS-II 条件はそれぞれ以下の SSS-I$'$ 条件と SSS-II$''$ 条件と同値である。

SSS-I$'$ 条件：非負行列 $\mathbf{A} \equiv [a_{ij}]$ の逆行列がミンコフスキー行列であるのは、番号の集合 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ の非空部分集合 J と所与の $\overline{x}_i > 0, i \in J^C$ に対して、以下の不等式を満たす $x_i > 0, i \in J$ が存在するときのみである。

$$\sum_{i \in J} a_{ij} x_i > \sum_{i \in J^C} a_{ij} \overline{x}_i \text{ for } j \in J,$$
$$\sum_{i \in J} a_{ij} x_i < \sum_{i \in J^C} a_{ij} \overline{x}_i \text{ for } j \in J^C.$$

SSS-II$''$ 条件：非負行列 $\mathbf{A}$ の逆行列がメツラー行列であるのは、集合 $J \subset N$ および所与の $\overline{w}_j > 0, j \in J^C$ に対して、以下の不等式を満たす $w_j > 0, j \in J$ が存在するときのみである。

$$\sum_{j \in J} w_j a_{ij} < \sum_{j \in J^C} \overline{w}_j a_{ij} \text{ for } i \in J,$$
$$\sum_{j \in J} w_j a_{ij} > \sum_{j \in J^C} \overline{w}_j a_{ij} \text{ for } i \in J^C.$$

そして、それぞれの条件の経済学的意味は以下のように解釈できる（高増, 1991, p. 116)。

SSS-I$'$ 条件：経済を 2 つの部門に分けるとき、どちらの部門内の産業で生産された財も、その産業が含まれる部門において、もう 1 つの部門で使用されるよりも多く使われる。このことが任意の部門の分け方について、しかも片方の部門内の産業の任意の産出水準において成立する。

SSS-II$''$ 条件：経済を 2 つの部門に分けるとき、どちらの部門内の産業で生産された財も、その産業が含まれる部門の商品をより小額に使用している。このことが任意の部門の分け方について、しかも片方の部門内の任意の生産価格水準について成立する。

したがって、SSS-I 条件および SSS-II 条件は要素集約度を含意していると考えられる。これらの条件が非常に強いものであることは贅言を要しない。

定理 9 は伝統的な HOS モデルとは異なり再生産可能な資本財を扱っているが、この定理はケンブリッジ資本論争の成果とどのような関係があるかのだろうか。バーマイスターのモデルは複雑な構造を有しているが、最も単純なケースに還元することでモデルの本質を抉り出してみよう。バーマイスター・モデルの最も単純なケースは消費財が 1 種類、資本財が 1 種類、本源的要素 (すなわち労働) が 1 種類の場合である[*31]。この仮定の下では（31）式は以下のように書き換えられる。

$$
[p, s] = [(1+r)\,p, w]\,\overline{\mathbf{A}}, \tag{35}
$$
$$
\overline{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ l_1 & l_2 \end{bmatrix}.
$$

（35）式では資本財は再生産可能であるが、消費財が非基礎財なので要素価格の決定に関して言えば（35）式は 1 財モデルである。（35）式の下では $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} > 0$ となり、任意の消費財価格ベクトルの下での任意の資本財価格の決定に対して、利潤率ないしは資本使用価格は、1 対 1 対応的に一意に決まる性質が維持されている[*32]。すなわち、要素価格は均等化する。しかし、モデルの基本的構造が 1 財モデルなので、ケンブリッジ資本論争で提起された問題を回避していることは明らかである。

つまり、Burmeister (1978) のモデルはケンブリッジ資本論争での争点となったような現象を回避できる構造になっており、想定し得る多くの経済環境をあらかじめ排除しているのである。例えば、分解不能なレオンチェフモデルのように、再生産可能であり消費財にも資本財にもなり得る財はこのモデルには存在してはならない。

実際、資本が再生産可能な複数の財から成る場合の最も単純な経済環境として、全ての財が基礎財となっている 2 財生産経済

$$
\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > \mathbf{0};\ \mathbf{L} \equiv (l_1, l_2) > \mathbf{0}
$$

---

*31 実際、その後の動学的 HOS 理論に関する諸文献 (Chen (1992); Nishimura and Shimomura (2002; 2006); Bond, Iwasa, and Nishimura (2011; 2012) 等) は、このタイプのモデルを適用している。

*32 この場合、資本財価格のみならず消費財価格と利潤率の 1 対 1 対応性も確認できる。実際、$p = \frac{wl_1}{1-(1+r)a_{11}}$ より、

$$
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{wl_1 a_{12}\,[1-(1+r)\,a_{11}] + (1+r)\,wl_1 a_{12} a_{11}}{[1-(1+r)\,a_{11}]^2} > 0
$$

が導かれる。

を考えてみよう。この経済を、バーマイスター・モデルに適用すると、

$$\overline{\mathbf{A}} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。このとき、$\det \overline{\mathbf{A}} = 0$ であるので、$\overline{\mathbf{A}}^{-1}$ は存在しない。したがって、定理 8 や定理 9 によって保証できる様な性質は、何も存在しない事が解る。

5 結論

本稿では、新古典派 HOS 理論が、ケンブリッジ資本論争において提起された限界生産力説批判をどのように対処したのかという問題意識のもと、資本の取り扱い方に焦点を当てて要素価格均等化定理に関する文献のレビューを行ってきた。

ケンブリッジ資本論争後の新古典派 HOS 貿易理論の到達点の 1 つは Burmeister (1978) である。バーマイスターのモデルは、異質で再生産可能な資本財が存在する下で要素価格均等化定理が成立する条件を導出している。近年の、Chen (1992)、Nishimura and Shimomura (2002; 2006)、Bond, Iwasa, and Nishimura (2011; 2012) 等によって展開されている、資本を再生産可能な財として取り扱う動学的 HOS 理論における基本モデルは、このバーマイスター・タイプのモデルとして位置づけられ得る。しかし、前節で検討したように、バーマイスター・タイプのモデルはケンブリッジ資本論争で指摘された厄介な問題が生じないような基本構造の下で構築されており、現実に存在し得る多くの経済環境を排除している。穀物のように資本財にもなり得るし消費財にもなり得る財の存在は排除された典型的な例である。

資本が複数の再生産可能財から成る事については論争の余地がないとすれば、新古典派 HOS 理論の妥当性は慎重に再検討されるべきであろう。第 1 に、資本をそのように取り扱う場合には、資本集約度の逆転が容易に起こり得ることに注意しなければならない。第 2 に、たとえ資本集約度の逆転が起こらなかったとしても、相対価格と利潤率の間に大域的単葉性が成立しない可能性がある。すなわち、資本を複数の再生産可能な財からなるものとしてより適切に定式化された下では、2 財の世界であれ、それ以上の財の存在する世界であれ、一般的に要素価格均等化が実現しない事を本稿は示してきた。この事は、既存の伝統的な HOS 貿易理論とは異なって、要素価格均等化の実現を前提とせずに、資本を複数の再生産可能な財からなるものとしてより適切に定式化された下での国際貿易の基礎理論を新たに再構築する必要性を示唆していると言えるのではなかろうか？

6　参考文献

伊藤元重・大山道広（1985）『国際貿易』岩波書店.

小山昭雄（2010）『新装版経済数学教室４：線型代数と位相（下）』岩波書店.

リスト、フリードリッヒ著、小林昇訳（1970[1841]）『経済学の国民的体系』岩波書店.

マルサス、トーマス著、楠井隆三・東嘉生訳（1940）『穀物条例論：地代論』岩波文庫.

森嶋通夫（2004 [1973]）『近代社会の経済理論』、『森嶋通夫著作集 12』岩波書店（『近代社会の経済理論』創文社）.

佐々木隆生（2010）『国際公共財の政治経済学：危機・構造変化・国際協力』岩波書店.

佐藤秀夫（2008）「米国の経常収支問題によせて」、『經濟學研究（北海道大学）』第 58 巻第 3 号, pp. 11–20.

高増明（1991）『ネオ・リカーディアンの貿易理論』創文社.

Berger, M. (1977) *Nonlinearity and Functional Analysis*, New York, Academic Press.

Blackorby, C., Schworm, W., Venables, A. (1993) Necessary and sufficient condtions for factor price equalization, *Review of Economic Studies*, 60, pp. 413–434.

Blaug, M. (1975) *The Cambridge Revolution: Success or Failure?: A Critical Analysis of Cambridge Theories of Value and Distribution*, London, Institute of Economic Affairs（M. ブローク著、福岡正夫・松浦保訳（1977）『ケンブリッジ革命』東洋経済新報社）.

Bliss, C. (1967) Reviews of *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson* Vol. 2, *Economic Journal*, 77, pp. 338-345.

Bond, E., Iwasa, K., Nishimura, K. (2011) A dynamic two country Hechscher-Ohlin model with non-homothetic preferences, *Economic Theory*, 48, pp. 171–204.

Bond, E., Iwasa, K., Nishimura, K. (2012) The dynamic Hechscher-Ohlin model: A disgrammatic analysis, *International Journal of Economic Theory*, 8, pp. 197–211.

Bruno, M., Burmeister, E., Sheshinski, E. (1966) The nature and implications of the reswitching of techniques, *Quarterly Journal of Economics*, 80, pp. 526–553.

Burmeister, E. (1978) An interest rate and factor price equalization theorem with nontraded commodities, *Journal of International Economics*, 8, pp. 1–9.

Burmeister, E. (1980) *Capital Theory and Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press.

Burmeister, E., Dobell, A., (1970) *Mathematical Theories of Economic Growth*, New York, Macmillan（E. バーマイスター・A. ドーベル著、佐藤隆三・大住栄治訳（1976）『現代経済成長理論』勁草書房）.

Chen, Z. (1992) Long-run equilibria in a dynamic Heckscher-Ohlin model, *Canadian Journal of Economics*, 25, pp. 923–943.

Chipman, J. (1965) A survey of the theory of international trade: Part 1, The classical theory, *Econometrica*, 33, pp. 477–519.

Chipman, J. (1966) A survey of the theory of international trade: Part 3, The modern theory, *Econometrica*, 34, pp. 18–76.

Chipman, J. (1969) Factor price equalization and the Stolper-Samuelson theorem, *International Economic Review*, 10, pp. 399–406.

Cohen, A., Harcourt, G. (2003) Retrospective: What happened to the Cambridge capital theory controversies?, *Journal of Economic Perspectives*, 17, pp. 199–214.

Ethier, W. (1984) Higher dimensional issues in trade theory, in Jones, R., Kenen, P. (eds.) *Handbook of International Economics*, vol. I, Amsterdam, North Holland, pp. 131–184.

Gale, D., Nikaido, H. (1965) The Jacobian matrix and global univalence of mappings, *Mathematische Annalen*, 159, pp. 81–93.

Garegnani, P. (1966) Switching of techniques, *Quarterly Journal of Economics*, 80, pp. 554–567.

Garegnani, P. (1970) Heterogeneous capital, the production function and the theory of distribution, *Review of Economic Studies*, 37, pp. 407–436.

Hahn, F. (1982) The neo Ricardians, *Cambridge Journal of Economics*, 6, pp. 353–374.

Harcourt, G. (1972) *Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital*, Cambridge, Cambridge University Press（G. ハーコート著、神谷傳造訳（1988）『ケムブリジ資本論争』改訳版、日本経済評論社）.

Heckscher, E., Ohlin, B. (1991) *Heckscher-Ohlin Trade Theory*, Cambridge (Mass.), MIT Press.

Inada, K. (1971) The production coefficient matrix and the Stolper-Samuelson condition, *Econometrica*, 39, pp. 219–239.

Kemp, M., Wegge, L. (1969) On the relation between commodity prices and factor rewards, *International Economic Review*, 10, pp. 407–413.

Kuga, K. (1972) The factor-price equalization theorem, *Econometrica*, 40, pp. 723–736.

Kurokawa, Y. (2014) A survey of trade and wage inequality: Anomalies, resolutions and new trends, *Journal of Economic Surveys*, 28, pp. 169–193.

Leontief, W. (1953) Domestic production and foreign trade; The American capital position re-examined, *Proceedings of the American Philosophical Society*, 97, pp. 332–349.

Leontief, W. (1956) Factor proportions and the structure of American trade, *Review of Economics and Statistics*, 38, pp. 386–407.

Levhari, D. (1965) A nonsubstitution theorem and switching of techniques, *Quarterly Journal of Economics*, 79, pp. 98–105.

Levhari, D., Samuelson, P. (1966) The nonswitching theorem is false, *Quarterly Journal of Economics*, 80, pp. 518–519.

Mainwaring, L. (1984) *Value and Distribution in Capitalist Economies: An Introduction to Sraffian Economics*, Cambridge, Cambridge University Press (L. マインウェリング著、笠松学・佐藤良一・山田幸俊訳（1987）『価値と分配の理論：スラッファ経済学入門』日本経済評論社).

Mas-Colell, A. (1979a) Two propositions on the global univalence of systems of cost function, in Green J., Scheinkman, J. (eds.) *General Equilibrium, Growth and Trade:*

Essays in Honour of Lionel McKenzie, vol. I, New York, Academic Press, pp. 323–331.

Mas-Colell, A. (1979b) Homeomorphism of compact, convex sets and the Jacobian matrix, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 10, pp. 1105–1109.

Mas-Cololl, Whinston, M., Green, J. (1995) *Microeconomic Theory*, Oxford, Oxford University Press.

Metcalfe, J., Steedman, I. (1972) Reswitching and primary input use, *Economic Journal*, 82, pp. 140–157 (reprinted in Steedman (1979), pp. 15–37).

Metcalfe, J., Steedman, I. (1973) Heterogenous capital and the Heckscher-Ohlin-Samuelson theory of trade, in Parkin, M. (ed.) *Essays in Modern Economics*, London, Longman, pp. 50-60 (reprinted in Steedman (1979), pp. 64–76).

Morishima, M. (1966) Refutation of the nonswitching theorem, *Quarterly Journal of Economics*, 80, pp. 520–525.

Nikaido, H. (1968) *Convex Structures and Economic Theory*, New York, Academic Press.

Nikaido, H. (1972) Relative shares and factor price equalization, *Journal of International Economics*, 2, pp. 257–263.

Nishimura, K., Shimomura, K. (2002) Trade and indeterminancy in a dynamic general equilibrium model, *Journal of Economic Theory*, 105, pp. 244–259.

Nishimura, K., Shimomura, K. (2006) Indeterminancy in a dynamic two-country model, *Economic Theory*, 29, pp. 307–324.

Obstfeld, M., Rogoff, K. (2005) Global current account imbalances and exchange rate adjustments, *Brookings Papers on Economic Activity*, 2005, pp. 67–123.

Pasinetti, L. (1966) Changes in the rate of profit and switches of techniques, *Quarterly Journal of Economics*, 80, pp. 503–517.

Pasinetti, L. (1977) *Lectures on the Theory of Production*, New York, Columbia University Press（L. パシネッティ著、菱山泉・山下博・山谷恵俊・瀬地山敏訳（1979）『生産理論：ポスト・ケインジアンの経済学』東洋経済新報社）.

Pasinetti, L. (2000) Critique of the neoclassical theory of growth and distribution, *BNL Quarterly Review*, 215, pp. 383–431.

Samuelson, P. (1948) International trade and the equalisation of factor prices, *Economic Journal*, 58, pp. 163–184.

Samuelson, P. (1949) International factor price equalisation once again, *Economic Journal*, 59, pp. 181–197.

Samuelson, P. (1953) Prices of factors and good in general equilibrium, *Review of Economic Studies*, 21, pp. 1–21

Samuelson, P. (1962) Parable and realism in capital theory: The surrogate production function, *Review of Economic Studies*, 29, pp. 193–206.

Samuelson, P. (1965) Equalization by trade of the interest rate along with the real wage, in Baldwin, R., et al. (eds.) *Trade, Growth, and the Balance of Payments: Essays in Honor of Gottfried Haberler*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, pp. 35–52.

Samuelson, P. (1966a) 1965 postscript, in Stiglitz, J. (ed.) *The Collected Scientific Papers of Paul A Samuelson*, vol. II, Cambridge (Mass.), MIT Press, p. 908（P. サミュエルソン著、J. スティグリッツ編、宇佐美泰生・篠原三代平・佐藤隆三訳（1980）『消費者行動の理論』、『サミュエルソン経済学体系 2』勁草書房）.

Samuelson, P. (1966b) A summing up, *Quarterly Journal of Economics*, 80, pp. 568–583.

Samuelson, P. (1967) Summary on factor-price equalization, *International Economic Review*, 8, pp. 286–295.

Samuelson, P. (1975) Trade pattern reversals in time-phased Ricardian systems and international efficiency, *Journal of International Economics*, 5, pp. 309–363.

Samuelson, P. (1978) Interest rate equalization and nonequalization by trade in Leontief-Sraffa models, *Journal of International Economics*, 8, pp. 21–27.

Smith, A. (1984) Capital theory and trade theory, in Jones, R., Kenen, P. (eds.) *Handbook of International Economics*, vol. I, Amsterdam, North Holland, pp. 289–324.

Sraffa, P. (1960) *Production of Commodities by means of Commodities: Prelude to a Critique of Economic Theory*, Cambridge, Cambridge University Press（P. スラッファ著、菱山泉・山下博訳（1962）『商品による商品の生産：経済理論批判序説』有斐閣）.

Steedman, I. (1979) *Fundamental Issues in Trade Theory*, London, Macmillan.

Stiglitz, J. (1970) Factor price equalization in a dynamic economy, *Journal of Political Economy*, 78, pp. 456–488.

Stolper, W., Samuelson, P. (1941) Protection and real wages, *Review of Economic Studies*, 9, pp. 58–73.

Takayama, A. (1985) *Mathematical Economics*, 2nd edition, Cambridge, Cambridge University Press.

Uekawa, Y. (1971) Generalization of the Stolper-Samuelson theorem, *Econometrica*, 39, pp. 197–217.

Uekawa, Y., Kemp, M., Wegge, L. (1972) P-and PN-Matrices, Minkowski-, and Metzler-Matrices, and generalizations of the Stolper-Samuelson and Samuelson-Rybczynski theorems, *Journal of International Economics*, 3, pp. 53–76.

Wegge, L., Kemp, M. (1969) Generalizations of the Stolper-Samuelson and Samuelson-Rybczynski theorems in terms of conditional input-output coefficients, *International Economic Review*, 10, pp. 414–425.

Wolf, M. (2004) *Why Globalization Works*, New Haven, Yale University Press.

7　補論

補論では諸定理の厳密な証明及び定理 7 に関連した数値例が示される。

7.1　2 財 2 国の場合の要素価格均等化定理の証明

証明. 費用関数 c の大域的単葉性を示す為には、価格方程式 $\mathbf{p} = \mathbf{w}\mathbf{A}(\mathbf{w})$ に関して、相対価格 $p_1'(\mathbf{w}) \equiv \frac{p_1}{p_2}$ と $\mathbf{w}$ との 1 対 1 対応性を示せば十分である。すなわち、任意の十分に小さい $\triangle w > 0$ に関して、要素価格ベクトルの変化 $\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w} + \triangle \mathbf{w} \equiv (w_1 + \triangle w, w_2 - \triangle w)$ を考察し、$p_1'(\mathbf{w}) \rightarrow p_1'(\mathbf{w} + \triangle \mathbf{w})$ が常に増加、もしくは常に減少であるならば、p_1' と $\mathbf{w}$ との 1 対 1 対応性が確認できる。それは、任意の相対価格 $p_1'(\mathbf{w})$ に関して、常に

$\frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} \vartriangle w - \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} \vartriangle w > 0$、もしくは常に $\frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} \vartriangle w - \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} \vartriangle w < 0$ となる事を示す事に他ならない。ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} &= \frac{a_{11}(\mathbf{w}) p_2 - p_1 a_{12}(\mathbf{w})}{(p_2)^2} = \frac{w_2 (a_{11}(\mathbf{w}) a_{22}(\mathbf{w}) - a_{12}(\mathbf{w}) a_{21}(\mathbf{w}))}{(p_2)^2}; \\ \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} &= \frac{a_{21}(\mathbf{w}) p_2 - p_1 a_{22}(\mathbf{w})}{(p_2)^2} = \frac{w_1 (a_{12}(\mathbf{w}) a_{21}(\mathbf{w}) - a_{11}(\mathbf{w}) a_{22}(\mathbf{w}))}{(p_2)^2} \end{aligned}$$

である事より、

$$\forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} \vartriangle w - \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} \vartriangle w > 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ a_{11}(\mathbf{w}) a_{22}(\mathbf{w}) - a_{12}(\mathbf{w}) a_{21}(\mathbf{w}) > 0\,;$$
$$\forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} \vartriangle w - \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} \vartriangle w < 0 \Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ a_{11}(\mathbf{w}) a_{22}(\mathbf{w}) - a_{12}(\mathbf{w}) a_{21}(\mathbf{w}) < 0.$$

条件 (7) より、

$$\forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} \vartriangle w - \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} \vartriangle w > 0;\ \text{もしくは}\ \forall \mathbf{w} \geq \mathbf{0},\ \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_1} \vartriangle w - \frac{\partial p_1'(\mathbf{w})}{\partial w_2} \vartriangle w < 0.$$

これは要素価格が $\mathbf{w} \to (w_1 + \vartriangle w, w_2 - \vartriangle w)$ の変化に対して、$p_1'(\mathbf{w})$ が単調増加ないしは単調減少する事を意味する。すなわち、相対価格 $p_1'(\mathbf{w})$ と $\mathbf{w}$ との大域的単葉性が成立する。よって、条件 (7) 式の下で要素価格均等化が成立する。 ■

7.2　定理 2 の証明

定理 2 の証明に入る前に、以下の補題を証明しておく必要がある。

補題 1：$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は連続で偏微分可能であるとする。偏微分係数を $f_{ij} \equiv \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ と表す。このとき、$m_k > 0, M_k > 0\,(k = 1, 2 \cdots, n)$ という $2n$ 個の正数が狭義首座小行列式の絶対値との間で

$$m_k \leqq \left| \det \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kk} \end{bmatrix} \right| \leqq M_k, k = 1, 2, \cdots, n$$

を満たすとき、$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ は所与のベクトル $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ に対して一意の解を持つ。

証明. Nikaido (1972) を見よ。 ■

定理 2 の証明には、費用関数の変型を行っておく方が便利である。$\omega \equiv \ln \mathbf{w} = [\ln w_i]$、$\pi \equiv \ln \mathbf{p} = [\ln p_i]$ と置き換えると、$\pi = \ln c(e^{\omega}) \equiv \varphi(\omega)$ となる。φ は $\mathbb{R}^n$ において連

続で偏微分可能である。したがって、$\frac{\partial \ln p_j}{\partial \ln w_i} = \frac{w_i}{c_j}\frac{\partial c_j}{\partial w_i} = \frac{w_i}{c_j} \times c_{ij}(\mathbf{w}) = \frac{c_{ij}(\mathbf{w})w_i}{p_j} = \alpha_{ij}$、つまり $\frac{\partial \ln p_j}{\partial \ln w_i}$ は財 j の生産費用増加率に占める要素 i の費用増加率の相対シェアとなる。したがって、$\widetilde{\mathbf{A}}$ は $\pi = \varphi(\omega)$ のヤコビアンである。以下で定理 2 の証明を示す。

証明. 補題 1 における方程式 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ は $\varphi(\omega) = \pi$ に相当する。$f_{ij} = \alpha_{ij} \geqq 0$ であるから (10) 式における δ_k は補題 1 の m_k に相当する。既に指摘したように $\widetilde{\mathbf{A}}$ は確率行列であり、したがって $\alpha_{ij} \in [0,1]$ かつ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$ である。行列式はその行列の成分の多項式によって求められるので、それが上に有界であることは明らかである。ゆえに上界 M_k が存在する。このことは方程式 $\varphi(\omega) = \pi$ が上の補題 1 の条件を満たすことを意味している。したがって、所与のベクトル $\pi > \mathbf{0}$ に対して方程式 $\varphi(\omega) = \pi$ は一意の解を持つ。このことは、方程式 $c(\mathbf{w}) = \mathbf{p}$ も所与の $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ に対して一意の解を持つことを意味する。
■

7.3 定理 4 の証明

証明. 定理 2 の証明で用いたベクトルで定義される関数 π と ω を用いる。すなわち $\pi(\omega) \equiv \ln c(e^{\omega})$ である。仮定 2.4.2 より、$\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ であり、$J\pi(\omega) = \widetilde{\mathbf{A}} = [\alpha_{ij}]$ である。ただし、$J\pi(\omega)$ は $\pi(\omega)$ のヤコビアンである。既に述べたように、$\widetilde{\mathbf{A}}$ は確率行列なので、$\alpha_{ij} \in [0,1]$。したがって、$J\pi(\omega)$ の全ての成分の絶対値は、一様有界である。さらに $\left|\det \widetilde{\mathbf{A}}\right| > \varepsilon > 0$ が仮定されている。

連続で 1 回微分可能な写像 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ において、i) $|JF(\mathbf{x})| \geqq \varepsilon > 0$、及び、ii) $JF(\mathbf{x})$ の全ての成分の絶対値が一様有界であることは、$\left\|(JF(\mathbf{x}))^{-1}\right\| \leqq k$ となる為の十分条件である。ただし、$\|\cdot\|$ は $\|T\| \equiv \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|T\mathbf{x}\|$ と $\mathbb{R}^n$ において定義されるノルムである。また、$\det JF(\mathbf{x}) \neq 0$ かつ $\left\|(JF(\mathbf{x}))^{-1}\right\| \leqq k$ であれば F は同相写像である (Berger, 1977, p. 222)。

したがって、われわれの $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は同相写像であり、ゆえに $c : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ も同相写像である。■

7.4 定理 5 の証明

まず定理 5 の証明に必要な補題を以下で示す。

補題 2：凹関数 $F : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$、$\beta \in \partial F(\mathbf{X}_0), \beta \in \partial F(\mathbf{X}_1)$ とすれば、$\forall \mu \in [0,1]$ に対して $\beta \in \partial F(\mathbf{X}_\mu)$ である。ただし、$\mathbf{X}_\mu = \mu\mathbf{X}_0 + (1-\mu)\mathbf{X}_1$。さらに、$\forall \mu \in [0,1]$ に対して $F(\mathbf{X}_\mu) = F(\mathbf{X}_0) + \beta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0)$ であり、したがって $\{\beta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0), (\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0)\}$

は $\mathbf{X}_0$ において線形セグメントである。

証明. β は $\mathbf{X}_0$ と $\mathbf{X}_1$ における凹関数 F の劣勾配ベクトルなので、任意の $\mathbf{X} \in D$ に対して以下の不等式が成立する。

$$F(\mathbf{X}) \leqq F(\mathbf{X}_0) + \beta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0), \quad F(\mathbf{X}) \leqq F(\mathbf{X}_1) + \beta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_1).$$

前者に μ、後者に $1-\mu$ を乗ずることにより、$\forall\mu \in [0,1]$ に対して

$$F(\mathbf{X}) \leqq \mu F(\mathbf{X}_0) + (1-\mu) F(\mathbf{X}_1) + \beta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_\mu) \tag{36}$$

を得る。他方、F は凹関数なので以下を得る。

$$F(\mathbf{X}_\mu) \geqq \mu F(\mathbf{X}_0) + (1-\mu) F(\mathbf{X}_1). \tag{37}$$

（36）式と（37）式より $F(\mathbf{X}) \leqq F(\mathbf{X}_\mu) + \beta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_\mu)$ となる。これは $\beta \in \partial F(\mathbf{X}_\mu)$ であることを示している。したがって、

$$F(\mathbf{X}_0) \leqq F(\mathbf{X}_\mu) + \beta(\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_\mu), \quad F(\mathbf{X}_\mu) \leqq F(\mathbf{X}_0) + \beta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0)$$

である。この 2 つの不等式より $F(\mathbf{X}_\mu) = F(\mathbf{X}_0) + \beta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0)$ となる。ゆえに、$\{\beta(\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0), (\mathbf{X}_\mu - \mathbf{X}_0)\}$ は線形セグメントである。 ■

補題 2 は、凹関数の劣勾配ベクトルが凸集合上では不変に維持され得ることを示している。

補題 3：$\mathbf{p} \in \Pi, \mathbf{V}^c \in \Gamma^c(\mathbf{p})$ に対して以下が成立するとき、そのときのみ要素価格は均等化する：

$$R^c(,\mathbf{V}^c) = R_0^c(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{N} R_i(\mathbf{p}) V_i^c, \tag{38}$$

但し $\mathbf{V}^c \equiv [V_i^c]$ である。このとき R^c は微分可能であり、

$$\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{V}} R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c) = [R_1(\mathbf{p}), \cdots, R_N(\mathbf{p})]. \tag{39}$$

が全ての国において成立する。

証明. 十分性の証明：利潤関数が（38）式の形状をとるとすれば利潤関数は微分可能であり、（39）式が成立し、要素価格は（24）式と整合する。

必要性の証明：定義 2.5.1 より、ある非空の開凸集合 Π が存在し、任意の $\mathbf{p} \in \Pi$ に対してある非空の開凸集合のプロフィール $(\Gamma_N^c(\mathbf{p}))_{c=1,\cdots,C}$ とある要素価格ベクトル

$\mathbf{W}\in\mathbb{R}_+^N$ が存在して、任意のプロフィール $\left(\mathbf{V}^c\left(\mathbf{p}\right)\right)_{c=1,\cdots,C}\in\underset{c=1,\cdots,C}{\times}\Gamma_N^c\left(\mathbf{p}\right)$ に対して、$\mathbf{W}=\nabla R^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right),\left(\forall c=1,\cdots,C\right)$ となる。したがって、任意の $c=1,\cdots,C$ 及び任意の $i=1,\cdots,N$ に関して、$\mathbf{0}_{-i}$ を第 i 要素を除いた $N-1$ 次元ベクトルとすれば、任意の $\mathbf{V}^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right)\in\Gamma_N^c\left(\mathbf{p}\right)$,

$$W_i=\lim_{\delta_i^c\to 0}\frac{R^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c+\left(\delta_i^c,\mathbf{0}_{-i}\right)\right)-R^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right)}{\left(V_i^c+\delta_i^c\right)-V_i^c}$$

が任意の $\mathbf{V}^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right)\in\Gamma_N^c\left(\mathbf{p}\right),\mathbf{W}=\nabla R^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right)$ よりしたがう。定義 2.5.1 より補題 2 の前提条件がこの $\mathbf{W}$ に関して満たされているので、任意の $\mathbf{V}^c,\overline{\mathbf{V}}^c\in\Gamma_N^c\left(\mathbf{p}\right)$ に関して

$$R^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right)=R^c\left(\mathbf{p},\overline{\mathbf{V}}^c\right)+\mathbf{W}\left(\mathbf{V}^c-\overline{\mathbf{V}}^c\right).$$

また $\mathbf{W}$ は $\mathbf{V}^c$ に依存しないので任意の $i=1,\cdots,N$ に関して、ある関数 $R_i:\Pi\to\mathbb{R}_+$ が存在して $W_i=R_i\left(\mathbf{p}\right)$ であるので、

$$R^c\left(\mathbf{p},\mathbf{V}^c\right)=R^c\left(\mathbf{p},\overline{\mathbf{V}}^c\right)+\sum_{i=1}^N R_i\left(\mathbf{p}\right)\left(V_i^c-\overline{V}_i^c\right),\left(\forall c=1,\cdots C\right)$$

となる。$\overline{\mathbf{V}}^c$ は $\Gamma_N^c\left(\mathbf{p}\right)$ 上のある固定されたベクトルとみなして $R_0^c\left(\mathbf{p}\right)\equiv R^c\left(\mathbf{p},\overline{\mathbf{V}}^c\right)-\sum\limits_{i=1}^N R_i\left(\mathbf{p}\right)\overline{V}_i^c$ である。■

補題 4：写像 $F:D\to\mathbb{R}$（但し $D\subseteq\mathbb{R}^k$）は凹であり、$\mathbf{X}\in D$ において $\beta\in\partial F\left(\mathbf{X}\right)$ とする。また $\left(\beta\delta^1,\delta^1\right)$ および $\left(\beta\delta^2,\delta^2\right)$ はそれぞれ $\mathbf{X}$ 上における F の線形セグメントである。このとき、任意の $\mu\in[0,1]$ に関して定義される $\delta=\mu\delta^1+\left(1-\mu\right)\delta^2$ に関しても $\left(\beta\delta,\delta\right)$ は $\mathbf{X}$ 上における F の線形セグメントになる。

証明. $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}+\lambda_1\delta^1$（但し、$\lambda_1\in\left(-\varepsilon_1,\varepsilon_1\right)$）及び $\mathbf{X}_2=\mathbf{X}+\lambda_2\delta^2$（但し、$\lambda_2\in\left(-\varepsilon_2,\varepsilon_2\right)$）としよう。そのとき、定義 2.5.2 より $\beta\in\partial F\left(\mathbf{X}_1\right),\beta\in\partial F\left(\mathbf{X}_2\right)$ である。したがって、補題 2 を適用することができ、$\mathbf{X}_1$ と $\mathbf{X}_2$ の凸結合である $\mathbf{X}_\mu$ に関しても $\beta\in\partial F\left(\mathbf{X}_\mu\right)$ となる。したがって、補題 2 より、$F\left(\mathbf{X}_\mu\right)=F\left(\mathbf{X}\right)+\beta\left(\mathbf{X}_\mu-\mathbf{X}_0\right)$ となり、$\left(\beta\delta,\delta\right)$ は $\mathbf{X}$ 上における F の線形セグメントになる。■

補題 5：生産関数 G^c の下で（23）式に基づいて定義される利潤関数 R^c であるとしよう。このとき R^c が $\left(\mathbf{p},\mathbf{V}_0^c\right)$ 上で $\mathbf{V}^c$ に関して線形セグメントを持つことと、G^c が $\left(\mathbf{p},\mathbf{V}_0^c\right)$ の下での利潤最大化解を $\mathbf{Z}_0^c$ とするとき、$\left(\mathbf{Z}_0^c,\mathbf{V}_0^c\right)$ 上で $\left(\mathbf{Z}^c,\mathbf{V}^c\right)$ に関して線形セグメントを持つことは同値である。

証明. R^c が $(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c)$ 上である線形セグメント $(\mathbf{W}\delta, \delta)$ を持つとしよう。そのとき、$\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{V}} R^c (\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c + \lambda\delta)$ がある正数 ε に対して、任意の $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に関して成立する。ここで、$\mathbf{p} = (\mathbf{p}^y, \mathbf{p}^z)$ であることより

$$\nabla_{\mathbf{V}} R^c (\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c) = \sum_{i=1}^{N} p_i^y \frac{\partial G^c (\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c)}{\partial V_i} = \mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{V}} G^c (\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c).$$

以上の 2 つの連立方程式より、任意の $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に関して

$$\begin{aligned}\mathbf{W} = \nabla_{\mathbf{V}} R^c (\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c + \lambda\delta) &= \sum_{i=1}^{N} p_i^y \frac{\partial G^c (\mathbf{Z}^c(\lambda), \mathbf{V}_0^c + \lambda\delta)}{\partial V_i} \\ &= \mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{V}} G^c (\mathbf{Z}^c(\lambda), \mathbf{V}_0^c + \lambda\delta).\end{aligned}$$

但し、$\mathbf{Z}^c(\lambda)$ は $(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0 + \lambda\delta)$ の下での利潤最大化解である。ここで、ある $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に関して、$(\mathbf{Z}_1^c, \mathbf{V}_1^c) \equiv (\mathbf{Z}^c(\lambda), \mathbf{V}_0 + \lambda\delta)$ とする。

$$\mathbf{p}^y \nabla G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c) = \left(\left(p_j^y \frac{\partial G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c)}{\partial Z_j} \right)_{j=1,\cdots,M}, \left(p_i^y \frac{\partial G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c)}{\partial V_j} \right)_{i=1,\cdots,N} \right)$$

であることより、また

$$\frac{\partial R^c}{\partial Z_j} = p_j^y \frac{\partial G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c)}{\partial Z_j} + p_j^z = 0 \ \ (\forall j = 1, \cdots M)$$

より

$$\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{Z}} G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c) = \left(p_j^y \frac{\partial G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}^c)}{\partial Z_j} \right)_{j=1,\cdots,M} = -\mathbf{p}^z$$

したがって、$\mathbf{p}^y \nabla G^c (\mathbf{Z}^c, \mathbf{V}_0^c) = (-\mathbf{p}^z, \mathbf{W})$。同様にして、$\mathbf{p}^y \nabla G^c (\mathbf{Z}^c(\lambda), \mathbf{V}_0^c + \lambda\delta) = (-\mathbf{p}^z, \mathbf{W})$。以上より、

$$(-\mathbf{p}^z, \mathbf{W}) = \mathbf{p}^y \nabla G^c (\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c) = \mathbf{p}^y \nabla G^c (\mathbf{Z}_1^c, \mathbf{V}_1^c).$$

したがって、補題 2 より、$(-\mathbf{p}^z, \mathbf{W}) = \mathbf{p}^y \nabla G^c \left(\mathbf{Z}_\mu^c, \mathbf{V}_\mu^c\right)$ となる、但し、$\mathbf{Z}_\mu^c = \mu \mathbf{Z}_0^c + (1-\mu) \mathbf{Z}_1^c, \mathbf{V}_\mu^c = \mu \mathbf{V}_0^c + (1-\mu) \mathbf{V}_1^c \ \ (\forall \mu \in [0,1])$。

ここで、$\beta = (-\mathbf{p}^z/\mathbf{p}^y, \mathbf{W}/\mathbf{p}^y)$ 及び $\delta = (\mathbf{Z}_1^c, \mathbf{V}_1^c) - (\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c)$ とすれば、$(\beta\delta, \delta)$ は G^c の $(\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c)$ 上で線形セグメントとなる。

逆を示すために (ψ^y, ψ^z, δ) が G^c の $(\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c)$ 上での線形セグメントであるとしよう。そのとき、

$$G^c (\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c) + \lambda\psi^y = G^c (\mathbf{Z}_0^c + \lambda\psi^y, \mathbf{V}_0^c + \lambda\delta)$$

となるので、

$$\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{Z}} G^c\left(\mathbf{Z}_0^c+\lambda \psi^x, \mathbf{V}_0^c+\lambda \delta\right)=\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{Z}} G^c\left(\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c\right)=-\mathbf{p}^z,$$

かつ

$$\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{V}} G^c\left(\mathbf{Z}_0^c+\lambda \psi^x, \mathbf{V}_0^c+\lambda \delta\right)=\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{V}} G^c\left(\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c\right)=\mathbf{W}$$

が、ある正数 ε に対する任意の $\lambda \in(-\varepsilon, \varepsilon)$ に関して成立する。ここで、$\nabla_{\mathbf{V}} R^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c\right)=\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{V}} G^c\left(\mathbf{Z}_0^c, \mathbf{V}_0^c\right)$ であるので $\mathbf{W}=\nabla_{\mathbf{V}} R_c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c\right)$。同様にして、$\nabla_{\mathbf{V}} R^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c+\lambda \delta\right)=\mathbf{p}^y \nabla_{\mathbf{V}} G^c\left(\mathbf{Z}_0^c+\lambda \psi^c, \mathbf{V}_0^c+\lambda \delta\right)$ が $\mathbf{p}^y \psi^y=\mathbf{W} \delta-\mathbf{p}^z \psi^z$ となる ψ^z に関して成立する。よって、$\mathbf{W}=\nabla_{\mathbf{V}} R^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c+\lambda \delta\right)$ が任意の $\lambda \in(-\varepsilon, \varepsilon)$ に関して成立する。したがって、$(\mathbf{W} \delta, \delta)$ は $\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c\right)$ 上で $\mathbf{V}$ に関する R^c の線形セグメントである。 ■

ここで定理 5 の証明に入ろう。

証明. 必要性の証明：要素価格が均等化すると仮定する。補題 3 より任意の点 $\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right) \in \Pi \times \Gamma_N^c(\mathbf{p})$ において利潤関数 R^c は $\mathbf{V}^c$ に関して N 個の線形セグメントを持つ。それらの線形セグメントを $\left(R_i(\mathbf{p}), \delta_i\right)$ と表わす。ただし、δ_i は基本ベクトルである。$\mathbf{Z}^{c*}$ は $\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c\right)$ を所与とした（23）式の最適値とする。補題 5 より、G^c が $\left(\mathbf{Z}^{c*}, \mathbf{V}_0^c\right)$ において $(\mathbf{Z}, \mathbf{V})$ に関して線形セグメントを有していることは、（23）式で定義される R^c が $\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}_0^c\right)$ において $\mathbf{V}^c$ に関して線形セグメントを有することの必要十分条件である。したがって、$\left(R_i(\mathbf{p}), \delta_i\right)$ が $\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right)$ において R^c の線形セグメントであるなら、$\left(\mathbf{Z}^{c*}, \mathbf{V}^c\right)$ において G^c の線形セグメントとなるベクトル $\left(\psi_i^c, \delta_i\right)$ が存在する。つまり、$\left(\mathbf{Z}^{c*}, \mathbf{V}^c\right)$ において G^c は任意の点 $\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right) \in \Pi \times \Gamma_N^c(\mathbf{p})$ において N 個の線形セグメント $\left(\psi_i^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right), \delta_i\right)$ を持つ。$\left(\psi_i, \delta_i\right)$ が G^c の線形セグメントなので、それは T^c の線形方向である。

δ_i は基本ベクトルなので補題 3 より任意の $\lambda \in(-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して

$$R^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c+\lambda\left(\delta_i, \mathbf{0}_{-i}\right)\right)=R^c(\mathbf{p})+\lambda R_i(\mathbf{p}) .$$

利潤関数と線形セグメントの定義より、

$$\mathbf{p}\left\{\mathbf{X}^{c*}+\lambda \psi_i^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right)\right\}=R^c(\mathbf{p})+\lambda R_i(\mathbf{p}) .$$

$\lambda=0$ のとき $\mathbf{p} \mathbf{X}^{c*}=R^c(\mathbf{p})$ なので、

$$\mathbf{p} \psi_i^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right)=R_i(\mathbf{p}) . \tag{40}$$

（40）式は任意の $\mathbf{p} \in \Pi$ において成立しなければならない。このことは $\psi_i^c\left(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c\right)$ が $\mathbf{V}^c \in \Gamma_N^c(\mathbf{p})$ から独立し、任意の $\mathbf{p} \in \Pi$ に対して全ての国で同一であることを示している。

十分性の証明：G^c が $(\psi_i(\mathbf{p}), \delta_i)$（但し、$i=1,\cdots,N$）で与えられる N 個の線形セグメントを持つと仮定する。δ_i は基本ベクトルである。このことは、補題 5 より、R^c が所与の $\mathbf{p}$ に対し $\mathbf{V}$ に関して線形セグメント $(R_i(\mathbf{p}), \delta_i)$ を持つことを意味している。したがって、$R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c + \lambda(\delta_i, \mathbf{0}_{-i})) = R^c(\mathbf{p}) + \lambda R_i(\mathbf{p}), (i=1,\cdots,N)$ がある正数 ε に対する任意の $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に関して成立する。したがって、補題 4 より $\left(\frac{1}{N}R(\mathbf{p}), \frac{\delta}{N}\right)$ は点 $(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c)$ 上の $\mathbf{V}$ に関する R^c の線形セグメントになる。すなわち、

$$R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c + \lambda\delta) = R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c) + \lambda\sum_{i=1}^{N} R_i(\mathbf{p})\,\delta_i$$

がある正数 ε/N に対する任意の $\lambda \in (-\varepsilon/N, \varepsilon/N)$ に関して成立する。したがって、補題 2 の適用により、補題 3 の証明と同様の論理で

$$R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c) = R_0^c(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{N} R_i^c(\mathbf{p})\,V_i^c$$

を得る。ここで、ψ_i:$\Pi \to \mathbb{R}\,(\forall i=1,\cdots,N)$ は全ての国において共通であり、かつ（40）式より $\mathbf{p}\psi_i(\mathbf{p}) = R_i^c(\mathbf{p})\,(\forall c=1,\cdots,C)$ が任意の $i=1,\cdots,N$ に関して成立する。すなわち、

$$R^c(\mathbf{p}, \mathbf{V}^c) = R_0^c(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{N} R_i(\mathbf{p})\,V_i^c, (\forall c=1,\cdots,C)$$

が成立する。よって補題 3 より任意の $\left(\mathbf{p}, (\mathbf{V}^c)_{c=1,\cdots,C}\right) \in \Pi \times \left(\underset{c=1,\cdots,C}{\times}\Gamma_N^c\right)$ に関して要素価格は均等化している。■

7.5　定理 6 の証明

証明. 必要性の証明：要素価格が均等化していると仮定する。定理 5 より、N 個のベクトル $(\psi_i(\mathbf{p}), \delta_i(\mathbf{p}))$ は T^c の線形方向である。したがって、以下を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する。すなわち、任意の $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して

$$T^c(\mathbf{X}^{c*} + \lambda\psi_i(\mathbf{p}), \mathbf{V}^c + \lambda\delta_i) = 0.$$

これを λ で微分すれば、

$$\nabla_{\mathbf{X}}T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)\,\mathbf{\Psi} + \nabla_{\mathbf{V}}T^c(\mathbf{X}^{c*}, \mathbf{V}^c)\,\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}.$$

これは（28）式である。上式から以下の 2 つを得る。

$$\nabla_{\mathbf{XX}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Psi}+\nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Omega}=\mathbf{0},$$
$$\nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Psi}+\nabla_{\mathbf{VV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Omega}=\mathbf{0}.$$

前者は (26) 式である。前者に $\mathbf{\Psi}^T$ を左乗すると

$$\mathbf{\Psi}^T\nabla_{\mathbf{XX}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Psi}+\mathbf{\Psi}^T\nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Omega}=\mathbf{0} \tag{41}$$

を得る。後者に $\mathbf{\Omega}^T$ を左乗すると

$$\mathbf{\Omega}^T\nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Psi}+\mathbf{\Omega}^T\nabla_{\mathbf{VV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Omega}=\mathbf{0}$$

を得るが、これを転置することにより

$$\mathbf{\Psi}^T\nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Omega}+\mathbf{\Omega}^T\nabla_{\mathbf{VV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Omega}=\mathbf{0} \tag{42}$$

となる。$\mathbf{\Omega}$ が単位行列であることを考慮すれば (41)式と (42) 式より、$\nabla_{\mathbf{VV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)=\mathbf{\Psi}^T\nabla_{\mathbf{XX}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\mathbf{\Psi}$ となり（27) 式を得る。

十分性の証明：(26) 式と (27) 式は

$$\begin{bmatrix}\nabla_{\mathbf{XX}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right) & \nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_i\left(\mathbf{p}\right)\\ \delta_i\left(\mathbf{p}\right)\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$
$$\begin{bmatrix}\nabla_{\mathbf{XV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right) & \nabla_{\mathbf{VV}}T^c\left(\mathbf{X}^{c*},\mathbf{V}^c\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_i\left(\mathbf{p}\right)\\ \delta_i\left(\mathbf{p}\right)\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

の成立を示唆している。これは、T^c のヘッセ行列が (28) 式を満たす N 個の固有ベクトルを持ち、それらに対応する固有値がゼロであることを示している。その N 個の固有ベクトルは $\left(\psi_i\left(\mathbf{p}\right),\delta_i\left(\mathbf{p}\right)\right)$ である $(i=1,\cdots,N)$。（28）式を満たしゼロ固有値に対応する固有ベクトルは T^c の線形方向である。したがって、定理 5 は要素価格均等化の成立を意味する。 ■

7.6　定理 7 の証明

証明. $n=2$ の場合、賃金率-利潤率曲線は以下のようになる。

$$w^1\left(r\right)=\frac{\left\{1-\left(1+r\right)a_{11}\left(\mathbf{p},w,r\right)\right\}\left\{1-\left(1+r\right)a_{22}\left(\mathbf{p},w,r\right)\right\}-\left(1+r\right)^2a_{12}\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)}{l_1\left\{1-\left(1+r\right)a_{22}\left(\mathbf{p},w,r\right)\right\}+\left(1+r\right)l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)}$$

ここで $w^1\left(r\right)\equiv\frac{w(r)}{p_1}$ であり、第 1 財をニュメレール財としている。対応して、財の相対価格は

$$p\left(r\right)=\frac{l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)\left\{1-\left(1+r\right)a_{11}\left(\mathbf{p},w,r\right)\right\}+\left(1+r\right)l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{12}\left(\mathbf{p},w,r\right)}{l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)\left\{1-\left(1+r\right)a_{22}\left(\mathbf{p},w,r\right)\right\}+\left(1+r\right)l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)}$$

となる。したがって、

$$\frac{\mathrm{d}p\left(r\right)}{\mathrm{d}r}=\frac{l_1\left(l_1a_{12}+l_2a_{22}\right)-l_2\left(l_1a_{11}+l_2a_{21}\right)}{l_1\left\{1-\left(1+r\right)a_{22}\right\}+\left(1+r\right)l_2a_{21}}$$

である。この分母は、技術が生産的であるとすれば実現可能ないかなる利潤率の値に対しても正である。ゆえに $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$ の符号は、分子のそれに依存する。従って、相対価格と利潤率の関係を、以下のようにまとめることができる。

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\lesseqqgtr 0\Leftrightarrow\frac{a_{12}\left(\mathbf{p},w,r\right)+pa_{22}\left(\mathbf{p},w,r\right)}{l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)}\lesseqqgtr\frac{a_{11}\left(\mathbf{p},w,r\right)+pa_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)}{l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)}.$$

ここで、$\frac{a_{11}(\mathbf{p},w,r)+pa_{21}(\mathbf{p},w,r)}{l_1(\mathbf{p},w,r)}$ は第 1 財部門の資本集約度であり、$\frac{a_{12}(\mathbf{p},w,r)+pa_{22}(\mathbf{p},w,r)}{l_2(\mathbf{p},w,r)}$ は第 2 財部門の資本集約度である。すなわち、利潤率の変化に対して相対価格が単調増加するか単調減少するかは、部門間の相対的な資本集約度の大小関係に依存している。相対価格が利潤率の単調減少関数になる場合は、財の相対価格が如何なる場合でも、第 1 部門が常に相対的により資本集約的であるとき、そのときのみである。対して、相対価格が利潤率の単調増加関数になる場合は、財の相対価格が如何なる場合でも、第 2 部門が常に相対的により資本集約的であるとき、そのときのみである[*33]。逆に、相対価格と利潤率との単調性関係 (すなわち大域的単葉性) が成り立たない場合は、ある相対価格を閾値として、部門間の資本集約度の逆転が生じるとき、そのときのみである。 ■

7.7 2財モデルにおける部門間資本集約度の逆転と大域的単葉性の関係に関する数値例

部門間資本集約度の逆転と大域的単葉性の関係について、2 部門レオンチェフ体系の数値例を使って確認しておこう。2 財を生産する以下のような 2 つの技術 α と β が存在するとしよう。

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}^\alpha\\ \mathbf{L}^\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/2\\ 1/3 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 1/3\end{bmatrix}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{A}^\beta\\ \mathbf{L}^\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/6\\ 1/3 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

α の下でも β の下でも第 1 産業の技術は同一である。技術選択は第 2 産業において生じる。第 1 財をニュメレール財にすれば、この例における資本集約度は $\iota=\alpha,\beta$ に対して第

[*33] 相対価格の増減は価格情報に依存することなく技術係数に関する情報のみからも知ることができる。以下のような関係が成立することは容易に確認できる。

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\lesseqqgtr 0\Longleftrightarrow\frac{l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{12}\left(\mathbf{p},w,r\right)+l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{22}\left(\mathbf{p},w,r\right)}{l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)}\lesseqqgtr\frac{l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{11}\left(\mathbf{p},w,r\right)+l_2\left(\mathbf{p},w,r\right)a_{21}\left(\mathbf{p},w,r\right)}{l_1\left(\mathbf{p},w,r\right)}.$$

1 産業では $k_1^{\iota}(r) = p^{\iota}(r)\, a_{21}^{\iota}$ であり同様に第 2 産業では $k_2^{\iota}(r) = a_{12}^{\iota}/l_2^{\iota}$ である。$p^{\iota}(r)$ は技術 ι の下での第 2 財の相対価格である。図 6 は技術 α の下での両産業の資本集約度、図 7 は技術 β の下での両産業の資本集約度を表わしている。

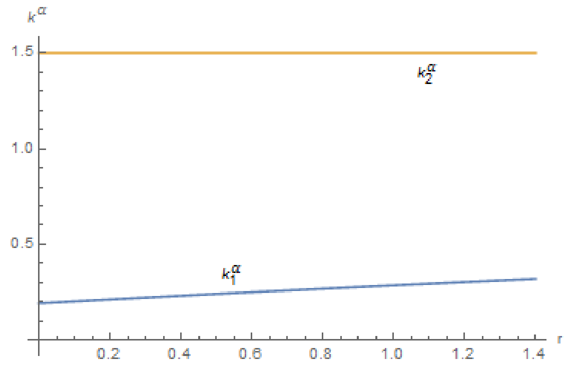

図 6　技術 α の下での資本集約度

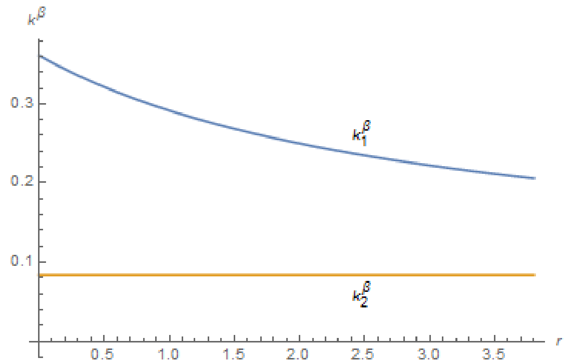

図 7　技術 β の下での資本集約度

より資本集約的な産業は技術 α の下では第 2 産業であるが技術 β の下では第 1 産業であり、要素集約度の逆転が起こっている。2 産業モデルでは、Mainwaring (1984) が明らかにしているように、賃金率-利潤率曲線が原点にむかって凸（凹）関数のとき相対価格は利潤率の単調減少（増加）関数となり、そのときニュメレールを生産している産業の資本（労働）集約度は相対的に高くなる。技術選択を分析する際、ニュメレール財を生産している産業の要素集約度が変化する技術変化が起きないと仮定する理由は何もない。したがって、2 財モデルのレオンチェフ生産技術が複数存在するとき、要素集約度の逆転は容易に起こりうるのであり、上記の例が特殊なわけではない。図 8 は第 1 財の価格をニュメレールにした場合のそれぞれの技術の賃金率-利潤率曲線を示している。費用最小化基準

にしたがって技術選択が行なわれるならば、この経済全体の賃金率-利潤率曲線は個々の賃金率-利潤率曲線の包絡線で表わされる。

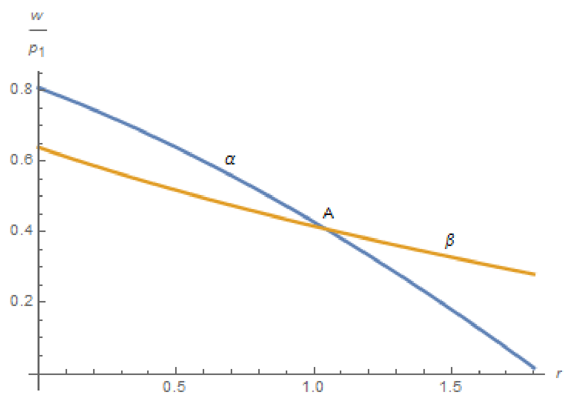

図 8　賃金率-利潤率曲線

転換点 A は $r = 1.04313$ であるが、このときどちらの技術を採用しても相対価格は同じになる。そして $0 \leqq r < 1.04313$ のとき技術 α が採用され、$1.04313 < r \leqq 3.89898$ のとき技術 β が採用される。3.89898 は技術 β の下で実現し得る最大利潤率である。

資本集約度の逆転が起きているので相対価格はもはや利潤率の単調関数にはならない。ゆえに、大域的単葉性は成立せず要素価格均等化は成立しない。図 9 は第 2 財の相対価格 p を図示したものであり、実際に相対価格と利潤率の間の一対一対応は大域的には成立していない。

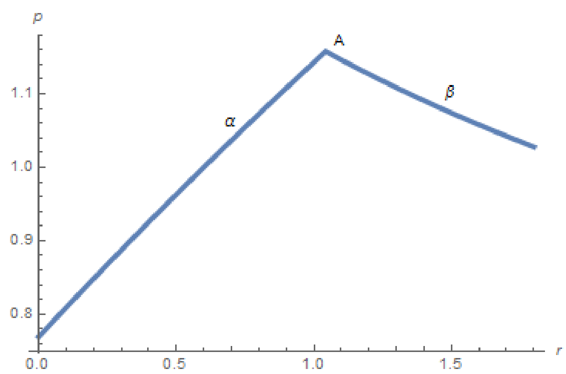

図 9　相対価格

7.8 定理 8 の証明

証明. SSS-II 条件の場合のみ証明すれば十分である。仮定より $-\bar{\mathbf{s}}\mathbf{B}_3 < 0$ そして $[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}]$ は非対角要素が全て負でかつ対角要素は全て正なので、r^* を $\mathbf{B}_1$ のフロベニウス根によって規定される最大利潤率とすれば、$r \in [0, r^*)$ に対して（33）式は $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ なる解に持つ（Takayama, 1985, p. 393)。したがって、$[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}]^{-1} < \mathbf{0}$ である。（33）式を r で微分すると、$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}] - \mathbf{p} = \mathbf{0}$, つまり

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r} = \mathbf{p}\,[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}]^{-1} < 0.$$

SSS-I 条件が満たされる場合も同様に証明することができる。■

7.9 定理 9 の証明

証明. ここでも SSS-II 条件の場合のみを証明すれば十分である。（34）式の最初の n 本の方程式は $\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}r} = \mathbf{p} + (1+r)\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}$ より次のようになる。

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}\mathbf{B}_1 + \frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{s}}}{\mathrm{d}r}\mathbf{B}_3 = \mathbf{p} + (1+r)\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}.$$

消費財価格は所与なので $\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{s}}}{\mathrm{d}r} = \mathbf{0}$ である。したがって、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r}[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}] = \mathbf{p}$$

を得る。SSS-II 条件が満たされている場合 $[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}]^{-1} < \mathbf{0}$ なので、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}r} = \mathbf{p}\,[\mathbf{B}_1 - (1+r)\,\mathbf{I}]^{-1} < \mathbf{0}.$$

SSS-I 条件が満たされている場合も同様に証明することができる。■