

TERG

Discussion Paper No. 268

小標本特性に優れたパネル単位根検定

千木良弘朗、山本拓

2011年7月

TOHOKU ECONOMICS RESEARCH GROUP

GRADUATE SCHOOL OF ECONOMICS AND
MANAGEMENT TOHOKU UNIVERSITY
KAWAUCHI, AOBA-KU, SENDAI,
980-8576 JAPAN

小標本特性に優れたパネル単位根検定

千木良 弘朗*

山本 拓[†]

2011年7月

概要

本論文では、優れた小標本特性を持つパネル単位根検定を提案する。この検定は既存のパネル単位根検定に簡単な修正を加えたものであり、容易に計算できる。検定統計量は、理論上はクロスセクションと時系列の標本数が共に十分大きい時に標準正規分布するが、実際にはかなりの小標本でもほぼ標準正規分布に従う。モンテカルロ実験では、サイズの歪みが少なく、検出力も既存の検定に比べ最大で約 2.4 倍あり、小標本特性の良さが示された。

1 はじめに

パネルデータは、クロスセクションと時系列の2つの方向を持つので情報量が多く、より深い経済分析を可能にする。このことから、近年、パネルデータに対する様々な分析手法が盛んに研究され大きく発展した。その手法の1つにパネル単位根検定がある。パネル単位根検定は、時系列分析の枠組みで開発された単位根検定をパネルデータに適用するという形で1990年代頃から研究が進んできた。現在ではかなり多様な種類のパネル単位根検定が提案されており、実証分析でも購買力平価説の検証を始めとして多くの応用例がある。

パネル単位根検定に関する文献は多数に上るが、代表的なものをいくつか概観する。Quah (1994) はパネル単位根検定に関する初期の研究の1つであり、Dickey and Fuller (1979) の augmented Dickey-Fuller (ADF) 検定をパネルデータで行った。この論文は先駆的であったが、パネルデータ分析を行うための主要な動機となる個別効果をモデルに入れていないという問題点もあった。Levin, Lin and Chu (2002) (LLC) は、Quah (1994) と同じく ADF 検定をパネルに拡張したが、個別効果を取り入れると共に個体毎に誤差項

*東北大学大学院経済学研究科。〒980-8576 仙台市青葉区川内 27-1。Email: hchigira@econ.tohoku.ac.jp

[†]日本大学経済学部。〒101-8360 東京都千代田区三崎町 1-3-2。Email: yamamoto.taku@nihon-u.ac.jp

の分散や系列相関の形が異なるといった不均一性を導入した。LLC の検定には、しかし、検定の対象となる動学パラメーターを個体間で均一にするという制約がある。このため、実証分析に応用する際には問題があるといった指摘もなされた¹。Im, Pesaran and Shin (2003) (IPS) は、LLC のこの制約を緩め、興味の対象である動学パラメーターにも不均一性を導入した。この IPS 検定は、かなり幅の広い不均一性を導入したという意味で柔軟な手法であり、多くの実証分析で用いられた。現在ではさらに進んだパネル単位根検定が多数提案されているが、それでも IPS 検定はパネル単位根検定の 1 つのベンチマークとして使われていると思われる。なお、上記の 3 つの論文は ADF 検定をパネルデータに適用したが、Maddala and Wu (1999) や Choi (2001) の combination 検定使えば ADF 検定はもちろんそれ以外の様々な時系列単位根検定をパネルデータに拡張できる。しかし、combination 検定は計算がやや煩雑になるので利便性には欠けるという難点がある。以上で紹介した検定法は全て、クロスセクションの相関を考慮しない方法であり、Hurlin and Mignon (2006) が「第 1 世代」と呼ぶものである。現在ではクロスセクション間の相関を考慮する「第 2 世代」の検定法が主流であると考えられるが、本論文ではクロスセクション相関は考慮しないため、「第 2 世代」の検定の紹介は省略する。本論文で提案する手法へのクロスセクション相関の導入は今後の課題としたい。

本論文では、IPS 検定の小標本特性を改善することを考える。Hlouskova and Wagner (2006) の網羅的なモンテカルロ実験によれば、IPS 検定は、LLC 検定や (ADF 検定を拡張する形の) combination 検定に比べてサイズの歪みは少なく、検出力も combination 検定よりも高いと見られる²。よって、IPS 検定が LLC 検定や combination 検定に比べて特に小標本特性に劣るとは思われぬのだが、問題は LLC 検定も IPS 検定も (ADF 検定を拡張する形の) combination 検定も ADF 検定に基づいているという点にある。ADF 検定には、時系列分析の文脈において、以前から検出力が低いという問題があると指摘されており、その検出力の低さが実証分析の結果を誤らせているとも言われている。そのため、IPS 検定も ADF 検定に基づく以上は検出力の低さという問題を抱えていると考えられる³。そこで、本論文では、ADF 検定に簡単な修正を加え、その修正した ADF 検定に基づいた IPS 検定を行うことで小標本特性の改善を図る。

¹Maddala and Wu (1999) を参照のこと。

²IPS 検定と LLC 検定は、対立仮説が異なっているために検出力の比較はできない。

³パネル単位根検定を行うことによって時系列単位根検定の検出力の低さを補えるといった議論がなされることもあるが、これは誤った議論である。詳細は Maddala, Wu and Liu (2000) を参照のこと。

本論文の構成は次の通り。2節でIPS検定を概観し、我々の新しいパネル単位根検定を提案する。3節でモンテカルロ実験を行い小標本特性を調べる。4節でまとめを行い今後の課題を挙げる。

2 モデルと検定法

次のような自己回帰 (autoregressive, AR) モデルを考える。

$$y_{it} = \mu_i + v_{it}, \quad v_{it} = \phi_{i1}v_{i,t-1} + \phi_{i2}v_{i,t-2} + \cdots + \phi_{iK_i}v_{i,t-K_i} + \varepsilon_{it},$$

$$\varepsilon_{it} \sim i.i.d.\mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

ここで、初期値 $y_{is} = \mu_i + v_{is}$, $s = -K_i + 1, \dots, 0$ は、定数でも確率変数でもよく、与えられているとする。誤差項 ε_{it} については、時系列方向にもクロスセクション方向にも独立と仮定する。なお、本論文では、提案する検定法の考え方を簡潔に説明するという観点からも、モデルに定数項がある場合のみを考える。トレンド項がある場合については、今後拡張していきたい。モデル (1) は以下のように書き換えられる。

$$y_{it} = \mu_i \phi_i(1) + \sum_{k=1}^{K_i} \phi_{ik} y_{i,t-k} + \varepsilon_{it}$$

ここで、 $\phi_i(1) = 1 - \sum_{k=1}^{K_i} \phi_{ik}$ である。これより、以下のような ADF 検定のための回帰式を得る。

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \beta_i y_{i,t-1} + \sum_{k=1}^{K_i-1} \rho_{ik} \Delta y_{i,t-k} + \varepsilon_{it} \quad (2)$$

ここで、 $\alpha_i = \mu_i \phi_i(1)$ 、 $\beta_i = -\phi_i(1)$ 、 $\rho_{ik} = -\sum_{h=k+1}^{K_i} \phi_{ih}$ である。

2.1 IPS 検定

本項では、IPS 検定を概観する。推定するモデルは (2) であり、検定問題は

$$H_0 : \beta_i = 0, \quad \forall i \text{ vs. } H_1 : \beta_i < 0, \quad i = 1, \dots, N_1, \quad \beta_i = 0, \quad i = N_1 + 1, \dots, N \quad (3)$$

である。これより、誤差項や定数項に i についての不均一性を認め、さらに興味のある動学パラメーターも H_1 の下では i について不均一であることを認めている。具体的には、IPS

の対立仮説は定常根 $\beta_i < 0$ が個体毎に変わるのを認めるだけでなく、一部の $N - N_1$ 個の個体が単位根を持つことも認める。なお、検定の一致性には $\lim_{N \rightarrow \infty} N_1/N = s$, $0 < s \leq 1$ なる条件が必要となる。対立仮説の下でいくつかの個体に単位根を認めることは、計量理論的・実証分析的に意義がある⁴一方で、検定結果の解釈に問題を生じさせる側面もある⁵。誤差項 ε_{it} については、*i.i.d.* で正規分布という厳しい仮定を置く。IPS が正規性を仮定するのは、以降で述べるように、 T が小さいときの ADF 検定統計量のモーメントの存在を保証すると共にそのモーメントの値を計算するためである。また、 ε_{it} を一般的な移動平均 (moving average, MA) 過程ではなく独立と仮定することは、系列相関には基本的に ADF 検定の形で処理できる AR 型の系列相関のみ認めることを意味する。この仮定は一般性を失うことにはなるが、IPS は ε_{it} を MA 過程としたモンテカルロ実験を行い、AR の次数 K_i を十分長く取れば誤差項が MA 過程でも IPS 検定は良く機能すると述べている。

IPS 検定の基本的な考え方は、個体毎に計算した ADF 検定統計量 t_{ci} のクロスセクションでの平均をとるというものである。 t_{ci} はモデル (2) を各 i について最小 2 乗法 (ordinary least squares, OLS) で推定して得られる β_i に対する t-検定統計量であり、次のように与えられる。

$$t_{ci} = \frac{\hat{\beta}_i}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_i)}} \quad (4)$$

⁴IPS と同様の対立仮説を用いる Maddala and Wu (1999) は、実際のパネルデータでは単位根を持つ個体と定常な個体が混ざっているだろうとし、そうしたパネルデータに対しては帰無仮説 (単位根) が棄却されるというのが我々の自然な期待だと述べている。そして、対立仮説の下で単位根を一切認めない「全個体が単位根 vs. 全個体が定常」という形の検定問題はあまり現実的ではないと主張している。

⁵帰無仮説が棄却されたところで全ての個体が定常とは言えないので、実証分析上の解釈が難しくなるという問題。詳しくは Taylor and Sarno (1998) を参照のこと。

ここで、

$$\hat{\beta}_i = \frac{y'_{i,-1} M_{Q_i} \Delta y_i}{y'_{i,-1} M_{Q_i} y_{i,-1}}, \quad \widehat{Var}(\hat{\beta}_i) = \frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2}{y'_{i,-1} M_{Q_i} y_{i,-1}}, \quad \hat{\sigma}_{\varepsilon_i}^2 = \frac{\Delta y'_i M_{X_i} \Delta y_i}{T - (K_i + 1)},$$

$$\Delta y_i = \begin{bmatrix} y_{i,1} - y_{i,0} \\ y_{i,2} - y_{i,1} \\ \vdots \\ y_{iT} - y_{i,T-1} \end{bmatrix}, \quad y_{i,-1} = \begin{bmatrix} y_{i,0} \\ y_{i,1} \\ \vdots \\ y_{i,T-1} \end{bmatrix}, \quad X_i = \begin{bmatrix} Q_i & y_{i,-1} \end{bmatrix},$$

$$Q_i = \begin{bmatrix} \iota & \Delta y_{i,-1} & \cdots & \Delta y_{i,-K_i+1} \end{bmatrix}, \quad \iota = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta y_{i,-1}, \dots, \Delta y_{i,-K_i+1} \text{は} \Delta y_i \text{と同様に定義},$$

$$M_{X_i} = I_T - X_i(X'_i X_i)^{-1} X'_i, \quad M_{Q_i} = I_T - Q_i(Q'_i Q_i)^{-1} Q'_i$$

である。この t_{ci} は、各 i について $T \rightarrow \infty$ とすることでいわゆる Dickey-Fuller (DF) 分布に収束する。DF 分布を ζ_c と書き、 ε_{it} をクロスセクション方向に独立と仮定したことに注意すると、 T が十分大きいときには H_0 の下で $t_{ci} \sim i.i.d. \zeta_c$, $i = 1, \dots, N$ となる。これより、 t_{ci} を ζ_c の期待値と分散で基準化すれば、

$$Z = \frac{\sqrt{N} \{ \sum_{i=1}^N t_{ci} / N - E(\zeta_c) \}}{\sqrt{Var(\zeta_c)}} \xrightarrow{N, T \rightarrow \infty, d} \mathcal{N}(0, 1)$$

を得る。ここで、 $\xrightarrow{N, T \rightarrow \infty, d}$ という記号は、 $T \rightarrow \infty$ の後に $N \rightarrow \infty$ とする逐次極限理論による分布収束を示す。この Z が IPS 検定統計量の基本的な形であるが、IPS はこれでは小標本特性が良くないとして次のような修正を行っている。

$$W = \frac{\sqrt{N} \{ \sum_{i=1}^N t_{ci} / N - \sum_{i=1}^N E(t_{ci}) / N \}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N Var(t_{ci}) / N}} \xrightarrow{N, T \rightarrow \infty, d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (5)$$

この W が、IPS が提案したパネル単位根検定統計量である。なお、 $E(t_{ci})$ と $Var(t_{ci})$ は、 K_i 、 T 、 ρ_{ik} 、 ε_{it} の分布の形に応じて値が変わる。そのため、IPS は ε_{it} を $i.i.d.$ で標準正規分布⁶、 $\rho_{ik} = 0$ と特定化した上でモンテカルロ実験を行い、様々な T と K_i について $E(t_{ci})$ と $Var(t_{ci})$ の値を計算している。

⁶IPS は、正規性が $E(t_{ci})$ と $Var(t_{ci})$ の存在のための十分条件であると述べている。

2.2 SCT-IPS 検定

本項では、上述した IPS 検定に修正を加える。修正の基本的な考え方は、各個体への ADF 検定統計量を計算する際に使う推定式の説明変数の数を減らすことで推定量の分散を減少させて効率的な検定を目指すというものである。具体的には、推定式 (2) から定数項を落とす。このため、我々が提案する方法は suppressed constant term (SCT) 法と呼ばれ、この方法を使って修正した IPS 検定を SCT-IPS 検定と表記する。ただし、定数項を落とすとモデルの特定化を誤ることになるので、それへの対処を考える必要がある。定数項を推定式に入れるということは、よく知られているように、OLS 推定において各変数から平均値を引くことに等しい。そこで、我々は平均値の代わりに初期値を引くことを考える。推定式 (2) の $y_{i,t-1}$ に着目した場合、 $E(y_{i,-K_i+1}) = \mu_i + E(v_{i,-K_i+1}) = \mu_i$ (いわゆる平均定常な初期値) であるならば、平均値 $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{i,t-1}$ も初期値 $y_{i,-K_i+1}$ も、 μ_i の不偏推定量という意味では同じものである。

SCT 法は、具体的には以下のように行う。まず、モデル (1) から初期値 $v_{i,-K_i+1}$ を引く。

$$(y_{it} - v_{i,-K_i+1}) = \mu_i + (v_{it} - v_{i,-K_i+1}),$$

$$(v_{it} - v_{i,-K_i+1}) = \phi_{i1}(v_{i,t-1} - v_{i,-K_i+1}) + \cdots + \phi_{iK_i}(v_{i,t-K_i} - v_{i,-K_i+1}) - \phi_i(1)v_{i,-K_i+1} + \varepsilon_{it}$$

ここで、 $y_{i,-K_i+1} = \mu_i + v_{i,-K_i+1}$ に注意すると

$$(y_{it} - y_{i,-K_i+1}) = \mu_i \phi_i(1) + \sum_{k=1}^{K_i} \phi_{ik}(y_{i,t-k} - y_{i,-K_i+1}) - \phi_i(1)y_{i,-K_i+1} + \varepsilon_{it}$$

を得る。この式は、 $y_{it}^* = y_{it} - y_{i,-K_i+1}$ として

$$\Delta y_{it}^* = \alpha_i + \beta_i y_{i,t-1}^* + \sum_{k=1}^{K_i-1} \rho_{ik} \Delta y_{i,t-k}^* - \phi_i(1)y_{i,-K_i+1} + \varepsilon_{it}$$

と書き直せる。なお、 $\Delta y_{it}^* = \Delta y_{it}$ であるので、簡潔化のため

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \beta_i y_{i,t-1}^* + \sum_{k=1}^{K_i-1} \rho_{ik} \Delta y_{i,t-k} - \phi_i(1)y_{i,-K_i+1} + \varepsilon_{it}$$

と書く。次に、定数項を落として推定式を

$$\Delta y_{it} = \beta_i y_{i,t-1}^* + \sum_{k=1}^{K_i-1} \rho_{ik} \Delta y_{i,t-k} + \eta_{it}, \quad \eta_{it} = \alpha_i - \phi_i(1)y_{i,-K_i+1} + \varepsilon_{it} \quad (6)$$

のように特定化する。ここで、もし初期値が平均定常ならば誤差項 η_{it} の無条件期待値は 0 になるので、特定化の誤りに対して一定の対処がなされていると思われる。そして、検定問題を IPS と同じく (3) と設定し、モデル (6) を OLS で推定して ADF 検定統計量を (4) と同様に

$$t_{ci}^* = \frac{\hat{\beta}_i^*}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*)}}$$

と計算する。この t_{ci}^* を SCT-ADF 検定統計量と呼ぶ。 H_0 の下での SCT-ADF 検定統計量の漸近的な挙動は簡単に導出できる。 H_0 の下では $\phi_i(1) = 0$ となるため、(6) は

$$\Delta y_{it} = \sum_{k=1}^{K_i-1} \rho_{ik} \Delta y_{i,t-k} + \varepsilon_{it}$$

となり、定数項を落としても特定化の誤りが生じないことが解る。よって、推定式に定数項を含まない時の DF 分布を ζ_0 とすると、 t_{ci}^* は T が十分大きければ、 H_0 の下で $t_{ci}^* \sim i.i.d.\zeta_0$, $i = 1, \dots, N$ となる。これより、最後に、 t_{ci}^* をその期待値と分散で基準化して

$$W^* = \frac{\sqrt{N} \{ \sum_{i=1}^N t_{ci}^* / N - \sum_{i=1}^N E(t_{ci}^*) / N \}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N Var(t_{ci}^*) / N}} \xrightarrow{N, T \rightarrow \infty, d} \mathcal{N}(0, 1) \quad (7)$$

を得る。この W^* が、我々が提案する SCT-IPS 検定統計量である。

2.2.1 H_0 の下での SCT-ADF 検定統計量

SCT-IPS 検定統計量を実際に計算するには小標本における t_{ci}^* の期待値と標準偏差の値が必要なので、本項ではモンテカルロ実験でこれらの値を求める。IPS に従い、 $\rho_{ik} = 0$ として誤差項に標準正規分布を仮定した data generating process (DGP) を使うことにする。表 1 に実験結果がまとめられているが、ここでは $K = 1$ のときしか行っていない。高次の K の対する実験は今後の課題とする。

表 1 の値を使って計算した W^* は、(7) 式に書いたように、 T と N が十分大きい時に標準正規分布に従う。ただし、実際には、 T が十分大きければ $N = 1$ でもほぼ標準正規分布すると言える。つまり、DF 分布 ζ_0 は、期待値 $E(\zeta_0)$ 分散 $Var(\zeta_0)$ の正規分布で良く近似できるということである。このことは Abadir (1995)、Gonzalo and Pitarakis (1998) 等で指摘されている。具体的には、Abadir (1995) は ζ_0 の確率密度関数 (probability density

表 1: t_0 の期待値と標準偏差

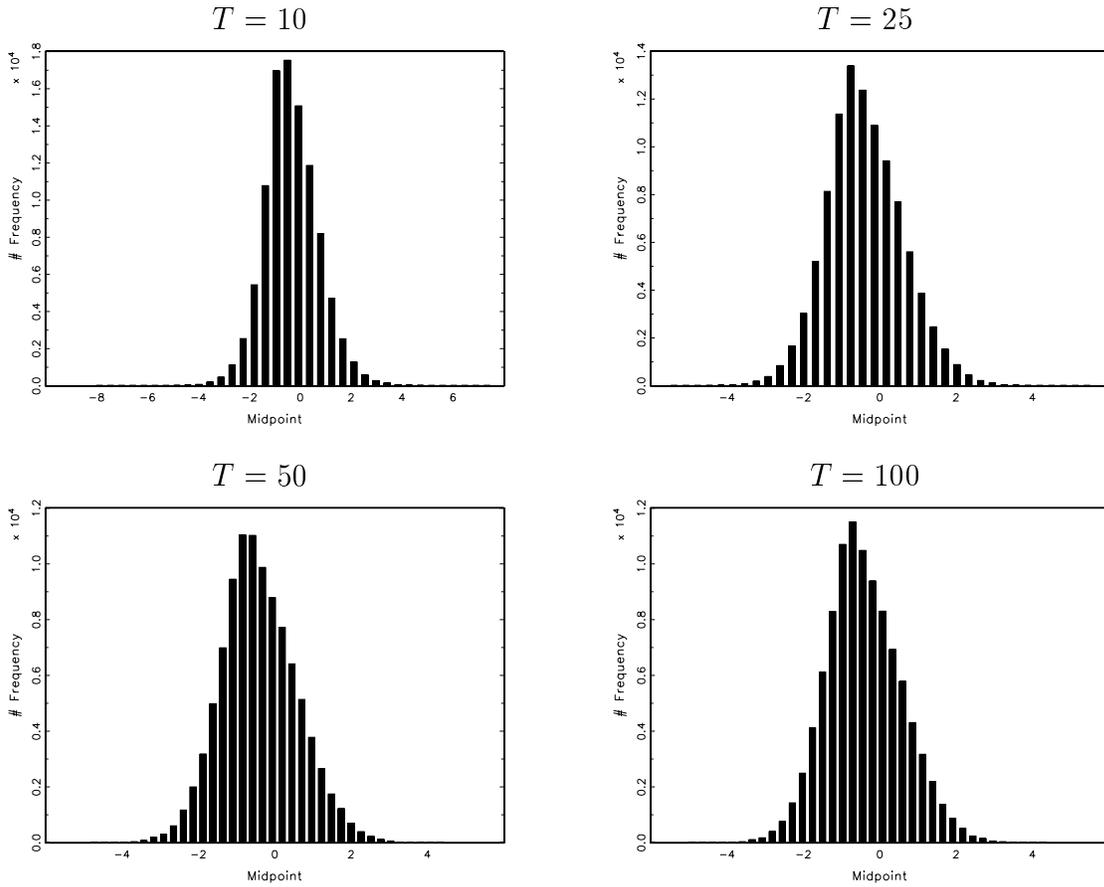
K	T	10	25	50	100	∞
1	期待値	-0.347	-0.399	-0.411	-0.415	-0.423
	標準偏差	1.055	1.004	0.991	0.986	0.981

注: この期待値と標準偏差は、繰り返し回数 100000 回のモンテカルロ実験で求めた。DGP は $\Delta y_t = \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim i.i.d. \mathcal{N}(0, 1)$, $t = 1, \dots, T$ で、初期値は $y_0 = 0$ とする。この DGP は IPS が使ったものと同じである。 t_0 は、 $K = 1$ の回帰式 $\Delta y_t = \beta y_t + \varepsilon_t$ より計算した $\beta = 0$ に対する t-検定統計量である。 $T = \infty$ の時のものは、Gonzalo and Pitarakis (1998) と Nabeya (1999) が解析的に求めた値である。

function, p.d.f.) と分布関数 (cumulative distribution function, c.d.f.) を解析的に導出し、正規分布の p.d.f. や c.d.f. とは異なるものの、かなり近い形をしていることを示した。そして、 ζ_0 は $\mathcal{N}(-0.3, 1)$ で良く近似できるとした。ただ、この -0.3 や 1 という値には特に根拠は無いようである。これに対し、Gonzalo and Pitarakis (1998) は $E(\zeta_0) = -0.423$ 、 $Var(\zeta_0) = 0.963$ であることを解析的に導出し、 ζ_0 は $\mathcal{N}(-0.423, 0.963)$ で精度の良い近似ができることを示した。なお、こうした結果を受けて、Abadir and Lucas (2000) では期待値と分散を調整してさらに近似精度を上げた正規分布を使って、単位根検定を正規分布で行うことを提案している。我々が提案する SCT-IPS 検定でも、 t_{ci}^* の期待値と分散そのものではなく、なるべく正規分布に近くなるような値で t_{ci}^* を基準化することも考えられる。しかし、Abadir and Lucas (2000) が時系列の単位根検定を扱っているのに対し、我々はパネル単位根検定である。期待値と分散で基準化をしないと $N \rightarrow \infty$ とした時に中心極限定理が使えなくなるため、期待値と分散そのものを使うことにする。

以上述べたように、 t_{ci}^* の分布は T が十分大きければ正規分布で近似できるが、 T が小さい時にはどの程度近似できるかを調べる。表 1 の数値を計算する時に行ったモンテカルロ実験から t_0 のヒストグラムを描くと図 1 のようになる。この図を見ると、 t_0 の分布は $T = 10$ ではやや正規分布と異なるものの、 $T = 25$ 以上ではかなり正規分布に近いことが解る。歪度と尖度 (歪度と尖度は、正規分布の場合共に 0 となる) については表 2 のようになった。歪度は、 $T = 10 \sim 100$ で 0.25 前後であり、これは自由度 130 程度の χ^2 分布の歪度に相当する。 χ^2 分布は自由度 30 以上で正規近似できると言われているので、0.25 という歪度は十分小さいと思われる。尖度は、 $T = 10$ では 0.962 とやや高いものの、 $T = 25$ では 0.378 まで下がる。自由度 20 の t-分布の尖度が 0.375 であるので、これも十

図 1: t_0 のヒストグラム



分小さいと言えるだろう。 $T = 25$ における t_0 の分布の正規近似がどの程度良いかをさらに調べるために、モンテカルロ実験で求めた t_0 の分位点と $\mathcal{N}(-0.399, 1.004^2)$ (-0.399 と 1.004 は、表1で求めた $T = 25$ での t_0 の期待値と標準偏差である)の分位点を比べる。表3にその結果がまとめられているが、各々の分位点はかなり近いと思われ、SCT-IPS検定はサイズの歪みが小さいであろうことを示唆している。例えば5%点は t_0 が -1.948 であり $\mathcal{N}(-0.399, 1.004^2)$ が -2.050 であるので、 $T = 25$ 、 $N = 1$ でSCT-IPS検定を有意水準5%で行うとサイズはやや下方に歪むことが予想されるが、歪みはあまり大きくないだろう。以上から、SCT-IPS検定は T が25程度、 N が1という小標本でサイズの意味で良く機能すると言えるだろう。

表 2: t_0 の歪度と尖度

T	10	25	50	100	∞
歪度	0.263	0.222	0.235	0.252	0.250
尖度	0.962	0.378	0.213	0.129	0.083

注: この歪度と尖度は、表 1 の値を計算したモンテカルロ実験から求めた。歪度と尖度は、正規分布の場合共に 0 となる。 $T = \infty$ の時のものは、Nabeya (1999) が解析的に求めた値である。

表 3: t_0 と正規分布の分位点

	quantiles(%)								
	1	2.5	5	10	50	90	95	97.5	99
$t_0 (T = 25)$	-2.660	-2.265	-1.948	-1.611	-0.470	0.916	1.327	1.701	2.119
$\mathcal{N}(-0.399, 1.004^2)$	-2.735	-2.367	-2.050	-1.686	-0.399	0.888	1.252	1.569	1.937

2.2.2 H_1 の下での SCT-ADF 検定統計量

H_0 の下での SCT-ADF 検定統計量の挙動は容易に導出できた。導出が容易だったのは、 H_0 の下では定数項を落としても特定化の誤りにはならないことと、 $y_{i,-K_i+1}$ を引いてもランダムウォークという過程の性質には影響がないという 2 つの点に依る。これに対し、 H_1 の下では定数項を落とすと特定化の誤りが生じる。さらに、 $y_{i,-K_i+1}$ を引くことで過程が定常から非定常へ変わってしまう。具体的には、 $y_{it} - y_{i,-K_i+1}$ なる過程は、平均定常な初期値を仮定すれば期待値は $E(y_{it} - y_{i,-K_i+1}) = 0$ で時間不変だが、分散 $Var(y_{it} - y_{i,-K_i+1})$ は一般に時変となる。さらに、全ての時点で $y_{i,-K_i+1}$ を引いているため共分散 $Cov((y_{it} - y_{i,-K_i+1})(y_{i,t+h} - y_{i,-K_i+1}))$ が $h \rightarrow \infty$ としても 0 にならない。時差を広げても共分散が 0 にならないことは、大数の法則が働かないことを意味するので、特に深刻である。

以下では、簡単化のため、 $K_i = 1$ の時のモデル

$$\Delta y_{it} = \beta_i y_{i,t-1}^* + \eta_{it}, \quad \eta_{it} = \alpha_i - \phi_i(1)y_{i0} + \varepsilon_{it}$$

における $\beta_i = \phi_{i1} - 1 < 0$ に対する OLS 推定量 $\hat{\beta}_i^*$ と $\widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*)$ の挙動を示す。

命題:

$$\hat{\beta}_i^* \xrightarrow{T \rightarrow \infty, p} (\phi_{i1} - 1) + \frac{(1 - \phi_{i1})(1 - \phi_{i1}^2)(\mu_i - y_{i0})^2}{\sigma_i^2 + (1 - \phi_{i1}^2)(\mu_i - y_{i0})^2}$$

$$T \times \widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*) \xrightarrow{T \rightarrow \infty, p} (1 - \phi_{i1}^2) + \frac{-2\sigma_i^2(1 - \phi_{i1}^2)(\mu_i - y_{i0})^2(\phi_{i1} - \phi_{i1}^2) - (1 - \phi_{i1}^2)^3(\mu_i - y_{i0})^4}{(\sigma_i^2 + (1 - \phi_{i1}^2)(\mu_i - y_{i0})^2)^2}$$

である。もし $y_{i0} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{1 - \phi_{i1}^2})$ ならば

$$\hat{\beta}_i^* \xrightarrow{T \rightarrow \infty, p} (\phi_{i1} - 1) + \frac{(1 - \phi_{i1})\chi_1^2}{1 + \chi_1^2}$$

$$T \times \widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*) \xrightarrow{T \rightarrow \infty, p} (1 - \phi_{i1}^2) + \frac{-2\chi_1^2(\phi_{i1} - \phi_{i1}^2) - (1 - \phi_{i1}^2)\chi_1^2}{(1 + \chi_1^2)^2}$$

となる。

証明: 要求に応じて提供する。

このように、 $\hat{\beta}_i^*$ には一貫性が無く、(\sqrt{T} を掛けなくても) 確率変数に収束する。ただし、その確率変数は、 $y_{i0} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \frac{\sigma_i^2}{1 - \phi_{i1}^2})$ を仮定すれば μ_i や σ_i^2 といった他のパラメーターに依存することはない。また、 $0 \leq (\mu_i - y_{i0})^2 < \infty$ という弱い仮定だけでも

$$\phi_{i1} - 1 \leq \text{plim} \hat{\beta}_i^* < 0$$

が示せるので、収束先が確率変数とは言え取り得る値の範囲には制限があり、真の $\phi_{i1} - 1$ 以上の値を取るが 0 (つまり単位根) より小さいことが解る。分散 $T\widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*)$ についても確率変数に収束するが、 y_{i0} に正規性を仮定すれば μ_i や σ_i^2 に分布が依存することはない。また、 $0 \leq (\mu_i - y_{i0})^2 < \infty$ を仮定すれば

$$0 < \text{plim} T\widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*) \leq 1 - \phi_{i1}^2$$

のように、収束先の確率変数は有限の値を取ることが示せる。これより、SCT-ADF 検定には検定の一貫性があることが解る。さらに、興味深い点として、 $(\mu_i - y_{i0})^2$ が大きくなると $\text{plim} \hat{\beta}_i^*$ は真の値 $\phi_{i1} - 1$ から離れるが、同時に $\text{plim} T\widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*)$ は定数項を入れた正しい特定化の下での分散 $1 - \phi_{i1}^2$ より小さくなり推定の精度が上がることもある。このように分散が小さくなることは、説明変数の数を減らした効果だと思われる。なお、もし偶然にも $(\mu_i - y_{i0})^2 = 0$ ということが起きれば、 $\text{plim} \hat{\beta}_i^* = \phi_{i1} - 1$ 、 $\text{plim} T\widehat{Var}(\hat{\beta}_i^*) = 1 - \phi_{i1}^2$ のように正しい特定化の下での結果と同じになるのは自明のことである。以上のように、SCT 法を使うと H_1 の下では β_i の推定量が 0 (つまり単位根) に収束することは無い一方で推定量の分散が下がり、このことが小標本での検出力の増加に貢献すると思われる。

表 4: 検定の小標本特性

N	test	T							
		10		25		50		100	
		size	power	size	power	size	power	size	power
1	IPS	0.051	0.059	0.046	0.071	0.047	0.114	0.043	0.305
	SCT-IPS	0.037	0.053	0.041	0.085	0.043	0.152	0.040	0.392
10	IPS	0.053	0.095	0.054	0.267	0.047	0.783	0.046	1.000
	SCT-IPS	0.045	0.158	0.048	0.546	0.047	0.960	0.049	1.000
25	IPS	0.056	0.150	0.055	0.557	0.046	0.993	0.047	1.000
	SCT-IPS	0.054	0.321	0.046	0.918	0.047	1.000	0.045	1.000
50	IPS	0.057	0.230	0.053	0.840	0.051	1.000	0.046	1.000
	SCT-IPS	0.052	0.549	0.052	0.998	0.048	1.000	0.049	1.000
100	IPS	0.055	0.359	0.053	0.986	0.046	1.000	0.045	1.000
	SCT-IPS	0.053	0.821	0.047	1.000	0.052	1.000	0.052	1.000

注: SCT-IPS 検定は (7) で定義されたもので、 t_{ci}^* の期待値と標準偏差には T に応じた表 1 の数値を使う。IPS 検定は (5) 式で定義されたもので、 t_{ci} の期待値と標準偏差には T に応じて IPS の Table 3 の数値を使う。DGP は $y_{it} = (1 - \phi_{i1})\mu_i + \phi_{i1}y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}$, $\varepsilon_{it} \sim i.i.d.\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, N$, $t = -51, -50, \dots, T$ である。ここで、 μ_i は $\mathcal{N}(0, 1)$ から生成し、 σ_i^2 は $U[0.5, 1.5]$ から生成する。 ϕ_{i1} は、帰無仮説の下では全ての i について 1 とし、対立仮説の下では全ての i について 0.9 とする。真のラグ次数 $K_i = 1$ を既知とし、名目サイズは 0.05 とする。繰り返し回数は 10000 回である。

3 実験とその結果の考察

SCT-IPS 検定の小標本特性をモンテカルロ実験で調べる。DGP は以下のものを使う。

$$y_{it} = (1 - \phi_{i1})\mu_i + \phi_{i1}y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \varepsilon_{it} \sim i.i.d.\mathcal{N}(0, \sigma_i^2), i = 1, \dots, N, t = -51, -50, \dots, T$$

ここで、 μ_i は $\mathcal{N}(0, 1)$ から生成し、 σ_i^2 は $U[0.5, 1.5]$ から生成する。 ϕ_{i1} は、帰無仮説の下では全ての i について 1 とし、対立仮説の下では全ての i について 0.9 とする。標本数は $N = \{1, 10, 25, 50, 100\}$ 、 $T = \{10, 25, 50, 100\}$ とし、真のラグ次数 $K_i = 1$ を既知とする。以上の設定は IPS が行ったモンテカルロ実験と同じである。SCT-IPS 検定は (7) で定義されたもので、 t_{ci}^* の期待値と標準偏差には T に応じた表 1 の数値を使う。なお、小標本特性の比較のため IPS 検定 (5) も行い、 t_{ci} の期待値と標準偏差は T に応じて IPS の Table 3 の数値を使う。名目サイズは 0.05、繰り返し回数は 10000 回とする。

実験の結果は表 4 のようになった。これより、SCT-IPS 検定は、 N が小さい時に実質

サイズが名目サイズをやや下回るが、概ねサイズの歪みは小さいと言える。サイズがやや下方に歪むことは、2.2.1項での予想の通りである。IPS 検定も、サイズはかなり安定している。なお、IPS 検定が $N = 1$ でもサイズの歪みが小さいことは、推定式に定数項を含んだ時の DF 分布 ζ_c がほぼ正規分布であることを示唆する。実際、Nabeya (1999) が解析的に計算した ζ_c の歪度は 0.218、尖度は 0.334 とかなり小さく、正規分布に近いことをうかがわせる。また、上記のモンテカルロ実験で筆者が描いた $N = 1$ での IPS 検定統計量のヒストグラムは非常に正規分布に近いものであった。

検出力については、SCT-IPS 検定は $T = 10$ 、 $N = 1$ の時に IPS 検定をわずかに下回るものの、他の標本数では全て IPS 検定を上回っている。 T が小さく N がやや大きい場合で検出力に大きな違いがあり、特に $T = 10$ 、 $N = 50$ での SCT-IPS 検定の検出力は IPS 検定の検出力の約 2.4 倍にもなる。表 4 全体の平均では、SCT-IPS 検定の検出力は IPS 検定の約 1.4 倍である。検出力の上昇の理由は、2.2.2 項で議論したように、定数項を落とすことで推定の効率性が上昇したことであろう。ただし、SCT-IPS 検定には T が大きくなるもしくは ϕ_{i1} が小さくなるにつれて IPS 検定に対する優位性が下がる傾向がある。上のモンテカルロ実験の追加的な実験として、 $N = 1$ の時の $\phi_{i1} = \{0, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9, 0.95\}$ に対する検出力を計算したところ次のようになった。 $T = 10$ のときには、(サイズの歪みを考慮すれば) ϕ_{i1} の多くで SCT-IPS 検定の検出力が IPS 検定より高いと思われたのに、 $T = 25$ では $\phi_{i1} = \{0, 0.3, 0.5\}$ で IPS 検定に劣り、 $T = 50$ と $T = 100$ では $\phi_{i1} = \{0, 0.3, 0.5, 0.7\}$ で IPS 検定に劣った。こうした性質は、定数項を入れた正しい特定化での OLS 推定量 $\hat{\beta}_i$ と SCT 法での推定量 $\hat{\beta}_i^*$ の平均平方誤差 (mean squared error, MSE) に依るのではないかと考えられる。 $\hat{\beta}_i$ は正しい特定化で推定しているのでバイアスが小さいが説明変数の数が多いため分散が大きく、 $\hat{\beta}_i^*$ は誤った特定化の下で推定しているのでバイアスが大きい説明変数の数が少ないので分散は小さい。こうしたトレードオフにより、 $\hat{\beta}_i^*$ は T が小さく ϕ_{i1} が 1 に近い時に MSE が $\hat{\beta}_i$ より小さくなって検出力が上がると思われる。時系列分析での MSE の計算は容易ではないが、Tanaka (1983) や Yamamoto and Kunitomo (1984) 等の先行研究があるので、 $\hat{\beta}_i^*$ の MSE もそれらを適用すれば導ける可能性はある。ただし、SCT 法を使うとかなり特殊な非正常過程における推定をすることになるので困難も予想される。また、 $T \rightarrow \infty$ とすると、 $\hat{\beta}_i$ には一貫性があるのに対し $\hat{\beta}_i^*$ には無いことから、 T が大きい時に SCT 法は不利になる可能性がある。よって、 $T \rightarrow \infty$ として局所対立仮説を使った検出力の比較は、仮にできたとしても、SCT-IPS 検定が高い検出力を

表 5: 簡便化した SCT-IPS 検定の小標本特性

N	T							
	10		25		50		100	
	size	power	size	power	size	power	size	power
1	0.042	0.058	0.043	0.088	0.043	0.153	0.041	0.392
10	0.034	0.129	0.044	0.525	0.045	0.958	0.048	1.000
25	0.031	0.233	0.038	0.901	0.044	1.000	0.041	1.000
50	0.022	0.377	0.040	0.996	0.042	1.000	0.044	1.000
100	0.013	0.599	0.030	1.000	0.040	1.000	0.047	1.000

注: SCT-IPS 検定は (7) で定義されたもので、 t_{ci}^* の期待値と標準偏差には T にかかわらず表 1 の $T = \infty$ の数値を使う。他の設定は表 4 のモンテカルロ実験と同じである。

持つという結果に至る保証は無いと思われる。モンテカルロ実験の結果では T が小さい時の SCT-IPS 検定の優位性が大きいことから、小標本での t_{ci}^* の分布を導いて検出力を計算するのが望ましいと思われるが、時系列分析ではこれは容易ではない。Tanaka (1983) では定常 AR モデルに対する通常の t -検定統計量の小標本分布を導いているが、これを SCT 法に直接適応できるかどうかは、SCT 法が非定常過程を扱っていることを考えると、直感的には明らかではない。

最後に、SCT-IPS 検定統計量の計算を簡便にすることを考える。これまでは (7) 式の t_{ci}^* の期待値と標準偏差に T に応じた表 1 の数値を使ってきた。ただし、 T に応じて数値を変えるのはやや煩雑なので、 T にかかわらず漸近的な値である ζ_0 の期待値と標準偏差を使うことを考える。 ζ_0 の期待値と標準偏差は表 1 における $T = \infty$ の値である。この時の SCT-IPS 検定の小標本特性は表 5 のようになった。 $T = 50$ までは N が大きくなるにつれてサイズの歪みが大きくなる傾向があるため、 T に応じて期待値と標準偏差を変える必要があると思われる。 $T = 100$ ではサイズが安定しているため、 T が 100 以上ならば T にかかわらず漸近的な期待値と標準偏差を使って問題無いと言えるだろう。

4 まとめ

SCT 法という新たなアプローチでパネル単位根検定を行った。我々が提案する SCT-IPS 検定は、データから初期値を引き、定数項を落としたモデルを用いて IPS 検定を行うと

いう非常に簡単なものである。SCT-IPS 検定統計量は、理論上は N と T が十分大きい時に標準正規分布するが、実際には $N = 1$ 、 $T = 25$ 程度の小標本でも標準正規分布で十分近似できる。モンテカルロ実験では、SCT-IPS 検定はサイズの歪みが少ない上に IPS 検定より最大で約 2.4 倍の検出力を示し、優れた小標本特性を持つと思われる。

今後の課題としては、次の 3 点がある。1 つ目は、Elliott, Rothenberg and Stock (1996) の単位根検定との比較である。本論文で提案した SCT 法は ADF 検定の小標本特性の改善を図ったものだが、Elliott, Rothenberg and Stock (1996) も ADF 検定の改善を提案している。そして、その単位根検定をパネル単位根検定に拡張した Choi (2001) のモンテカルロ実験では、IPS 検定の約 3.9 倍もの高い検出力を持つ場合があった。Choi (2001) の実験と本論文の実験は設定が異なるので単純な比較はできないが Choi (2001) の検定が高い検出力を持つことは間違いないので、統一的な実験で小標本特性を比較する必要があるだろう。2 つ目は、帰無仮説としてドリフト付きランダムウォークを考えるとときにはどのように SCT 法を行うかということである。初期値を引いて定数項を落とすだけでは不十分だと思われるので何らかの方法を考える必要がある。3 つ目は、クロスセクション相関の導入である。近年のパネル単位根検定はクロスセクション相関を認めたものが主流であると考えられるので、このことにも対処する必要がある。

参考文献

- Abadir, K.M. (1995): “The Limiting Distribution of the t Ratio under a Unit Root,” *Econometric Theory*, 11, 775–793.
- Abadir, K.M. and A. Lucas (2000): “Quantiles for t-Statistics Based on M-Estimators of Unit Roots,” *Economics Letters*, 67, 131–137.
- Choi, I. (2001): “Unit Root Tests for Panel Data,” *Journal of International Money and Finance*, 20, 249–272.
- Dickey, D.A., and W.A. Fuller (1979): “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root,” *Journal of the American Statistical Association*, 74, 427–431.

- Elliott, G., Rothenberg, T.J., J.H. Stock (1996): “Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root,” *Econometrica*, 64, 813–836.
- Gonzalo, J. and J.-Y. Pitarakis (1998): “On the Exact Moments of Asymptotic Distributions in an Unstable AR(1) with Dependent Errors,” *International Economic Review*, 39, 71–88.
- Hlouskova, J. and M. Wagner (2006): “The Performance of Panel Unit Root and Stationarity Tests: Results from a Large Scale Simulation Study,” *Econometric Reviews*, 25, 85–116.
- Hurlin, C. and V. Mignon (2006): “Second Generation Panel Unit Root Tests,” mimeo.
- Im, K.S., Pesaran, M.H. and Y. Shin (2003): “Testing for Unit Roots in Heterogeneous Panels,” *Journal of Econometrics*, 115, 53–74.
- Levin, A., Lin, C.F. and J. Chu (2002): “Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-Sample Properties,” *Journal of Econometrics*, 108, 1–24.
- Maddala, G.S. and S. Wu (1999): “A Comparative Study of Unit Root Tests with Panel Data and a New Simple Test,” *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 61, 631–652.
- Maddala, G.S., Wu, S. and C. Liu (2000): “Do Panel Data Rescue the Purchasing Power Parity (PPP) Theory?” in Krishnakumar, J. and E. Ronchetti eds. *Panel Data Econometrics: Future Directions: Papers in Honour of Professor Pietro Balestra*, Elsevier, 35–51.
- Nabeya, S. (1999): “Asymptotic Moments of Some Unit Root Test Statistics in the Null Case,” *Econometric Theory*, 15, 139–49.
- Quah, D. (1994): “Exploiting Cross-Section Variation for Unit Root Inference in Dynamic Data,” *Economics Letters*, 44, 9–19.
- Tanaka, K. (1983): “Asymptotic Expansions Associated with the AR(1) Model with Unknown Mean,” *Econometrica*, 51, 1221–1231.

- Taylor, M.P. and L. Sarno (1998): “The Behavior of Real Exchange Rates During the Post-Bretton Woods Period,” *Journal of International Economics*, 46, 281–312.
- Toda, H.Y. and T. Yamamoto (1995): “Statistical Inference in Vector Autoregressions with Possibly Integrated Processes,” *Journal of Econometrics*, 66, 225–250.
- Yamamoto, T. and N. Kunitomo (1984): “Asymptotic Bias of the Least-Squares Estimator for Multivariate Autoregressive Models,” *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 36, 419–430.